

YENİ LİSE KİTAPLARI

# Cebir Dersleri

Lise II Edebiyat Kolu

Yazar:

TURAN TANIN

Matematik Öğretmeni

Üç sınıf liselerin ikinci sınıf edebiyat kolu programına göre hazırlanmış  
ve Millî Eğitim Bakanlığınca ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

ON DÖRDUNCÜ BASKI



İNKILAP ve AKA  
KİTABEVLERİ Koll. Sti.  
İstanbul, Ankara Cad. No: 95

YENİ LİSE KİTAPLARI

# Cebir Dersleri

Lise II Edebiyat Kolu

Yazar:

TURAN TANIN

Matematik Öğretmeni

Üç sınıflı liselerin ikinci sınıf edebiyat kolu programına göre hazırlanmış  
ve Millî Eğitim Bakanlığınca ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

ON DÖRDUNCÜ BASKI



İNKILÂP ve AKA  
KİTABEVLERİ Koll. Şti.  
İstanbul, Ankara Cad. No. 95

## PROGRAM<sup>1)</sup>

### CEBİR — II. SINIF

(Edebiyat Kolu)

1 — Üslü ve köklü çöklük kavramı: Pozitif veya negatif tam sayı ve kesir şeklinde üslerin anlamı. Nümerik basit alıştırmalar üzerinde üslü çöklüklerla ilgili işlemlerin kısaca tanımlaması. Logaritma kavramı: Logaritmanın özellikleri. Logaritma cetveli yardımıyle hesaplamalar.

2 — İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümü. Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılar.

3 —  $ax^2 + bx + c$  ifadesinin işaretinin incelenmesi. İkinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerin çözümü.

4 —  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonlarının değişimlerinin incelenmesi ve grafiklerinin çizilmesi.

5 — Koordinat eksenlerinin kendilerine paralel olarak kaydırılmaları.

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{ax + b}{ax' + b'}$$

şeklindeki fonksiyonlara uygulanması. Koordinat eksenlerine ve başlangıç noktasına göre simetri.  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonlarına ait grafiklerin simetri özellikleri.

6 — Değişkenin bir değeri için türevin geometrik tanımı ve anlamı. Değişkenin verilen bir değeri için

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{a}{x}; \quad y = \frac{ax + b}{ax' + b'}$$

fonksiyonlarının türevlerinin hesaplanması. Bu fonksiyonlara ait eğrilerin verilen bir noktasındaki teğetinin denklemi.

<sup>1)</sup> Bu program, 7 Ekim 1957 tarih ve 976 sayılı TEBLİĞLER DERGİSİ'nden alınmıştır.

Nesriyatı devam ettiren:

### TALİA TANİN

Istanbul Kız Lisesi Matematik Öğretmeni

Matbaa tashihlerini yapan:

M. Kemal ÖZTUNC

Istanbul Yüksek Teknik Okulu  
Öğretim Üyesi

NURGÖK MATBAASI  
Ankara Caddesi No. 15  
İSTANBUL — 1970

## BÖLÜM I

### ÜSLÜ ÇOKLUKLAR

1. Tanım. —  $n$  tam ve pozitif bir sayı olmak üzere,  $n$  tane  $a$  nin çarpımına  $a$  nin  $n$ inci kuvveti;  $a$  ya taban,  $n$  ye de üs denir ve  $a^n$  şeklinde yazılır.  $a^n$  şeklindeki bütün çöklüklera üslü çöklükler adı verilir. Suhalde:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a \cdot a}_{n \text{ tane}}$$

dir.

$n = 2$  için  $a^2 = a \cdot a$  olup  $a^2$  ye özel olarak « $a$  kare»

$n = 3$  »  $a^3 = a \cdot a \cdot a$  »  $a^3$  e özel olarak « $a$  küb»

denir. Diğer üslü çöklükler  $a^n$  « $a$  üssü  $n$ » şeklinde okunur ve yazılır.

2. Sonuçlar. — Pozitif bir sayının herhangibir kuvveti pozitif, negatif bir sayının çift kuvveti pozitif, tek kuvveti negatiftir.

1°  $a > 0$  olduğuna göre,

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a \cdot a}_{m \text{ tane}}$$

esitliğinin ikinci tarafını teşkil eden çarpanların hepsi pozitif olduğundan çarpım da pozitiftir.

2°  $a < 0$  ve  $m = 2k$  (çift) ise,

$$a^m = \underbrace{(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \dots (a \cdot a)}_{k \text{ tane}}$$

$k$  tane parantezden her birinin içi iki negatif sayının çarpımı olup pozitif olacağından bunların çarpımı da pozitif olur.

3°  $a < 0$  ve  $m = 2k + 1$  (tek) ise,

$$a^m = \underbrace{(a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \dots (a \cdot a)}_{k \text{ tane}} \cdot a$$

parantez içindeki  $a$  ların ikişer ikişer çarpımı pozitif olup bu çarpımın negatif olan  $a$  ile çarpımı negatiftir.

### Örnekler :

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

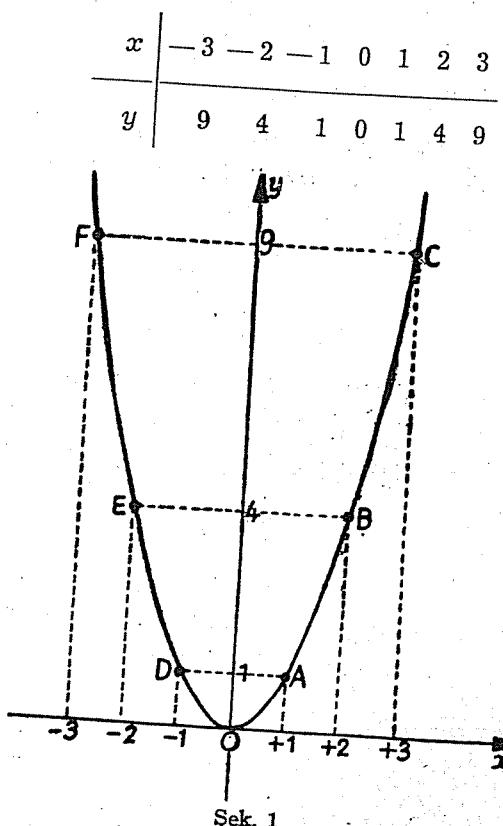
$$(-2)^6 = (-2 \cdot -2) \cdot (-2 \cdot -2) \cdot (-2 \cdot -2) = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$(-5)^7 = (-5 \cdot -5) \cdot (-5 \cdot -5) \cdot (-5 \cdot -5) \cdot (-5) = 25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot (-5) = -78\,125$$

bulunur.

$y = x^2$  ve  $y = x^3$  üslü çöklüklerinin grafikle gösterilmesi ve bir sayının kare ve kübünün grafikle bulunması

3.  $y = x^2$  fonksiyonunun gösterdiği eğriyi çizmek için  $x$  değişkenine birtakım değerler verelim.  $y$  nin buna karşılık alacağı değerleri hesaplayarak eğriye ait birtakım noktalar bulup grafiğini çizelim (Şek. 1) :

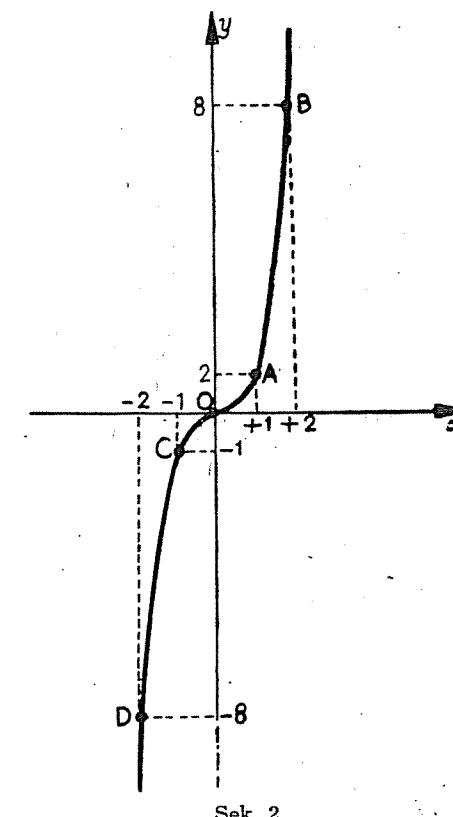


Bu eğriyi ilerde özellikleri ile inceleyeceğiz.

Bu eğri üzerindekiler noktanın ordinatı, apsisinin karesine eşittir. Herhangibir  $x_1$  sayısının, bu grafikten faydalananarak, karesini bulmak için  $Ox$  ekseni üzerinde apsi  $x_1$  olan noktadan bu eksene bir dikme çizilir. Bu dikmenin eğriyi kestiği noktanın ordinatı  $x_1$  in karesine eşittir. Örnek :  $(1,5)^2 = 2,25$  dir.

$y = x^3$  eğrisini nokta nokta çizmek için, yine  $x$  değişkenine birtakım değerler vererek  $y$  nin bunlara karşı gelen değerlerini hesaplayalım ve bir tabloda bu değer takımlarını göstererek eğriyi çizelim (Şek. 2) :

$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	-8	-1	0	1	8



Eğriye ait her noktanın ordinatı, apsisinin kübü olduğundan, herhangibir sayının kübünü bulmak için,  $Ox$  ekseninde bu sayıya karşı gelen noktadan bu eksene bir dikme çizilir. Bu dikmenin eğriyi kestiği noktanın ordinatı o sayının kübüne eşittir.

### ÜSLÜ ÇOKLUKLARIN DÖRT İŞLEMİ

**4. Toplama ve çıkarma.** — Taban ve üsleri aynı olan üslü çoklukların cebirsel toplamı, katsayısı bu üslü çoklukların katsayılarının cebirsel toplamı olan benzer (taban ve üsleri aynı) bir üslü çokluktur:

$$ma^x + na^x - pa^x = (m+n-p)a^x$$

dir. Örnekler:

$$3 \cdot 2^5 + 7 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^5 = (3+7-4) \cdot 2^5 = 6 \cdot 2^5$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{1}{3} \cdot 5^2 - \frac{2}{5} \cdot 5^2 = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right) \cdot 5^2 = \frac{13}{30} \cdot 5^2.$$

### ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki toplama ve çıkarmaları yapınız:

$$1^{\circ} 5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^3$$

$$2^{\circ} 2 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^5$$

$$3^{\circ} 2 \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{7}{3} \cdot 3^3 + \frac{5}{3} \cdot 3^3$$

$$4^{\circ} 8 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^4 - \frac{3}{4} \cdot 2^4 + \frac{7}{4} \cdot 2^4$$

$$5^{\circ} 6 \left( \frac{3}{5} \right)^2 + 7 \left( \frac{3}{5} \right)^2 - 8 \left( \frac{3}{5} \right)^2$$

$$6^{\circ} 4(-5)^2 - 3(5)^2 + 2(-5)^2$$

$$7^{\circ} 7(2)^3 + 4(-2)^3 + 3(-2)^3$$

$$8^{\circ} 21 \left( -\frac{5}{11} \right)^2 - 3 \left( \frac{5}{11} \right)^2 - 7 \left( -\frac{5}{11} \right)^2$$

$$9^{\circ} \frac{1}{4} x^5 - \frac{3}{5} x^5 - x^5 + \frac{1}{10} x^5$$

$$10^{\circ} \frac{5}{2} a^3 b^4 - \frac{13}{4} a^3 b^4 - \frac{5}{4} a^3 b^4$$

$$11^{\circ} \frac{1}{4} x^3 y - \frac{2}{5} x^3 y + \frac{3}{10} x^3 y$$

$$12^{\circ} \frac{5}{12} m^2 n^3 - \frac{7}{8} m^2 n^3 + m^2 n^3.$$

X yop

### Ç A R P M A

**5. Tabanları aynı, üsleri farklı üslü çoklukların çarpımı.**

**Teorem.** — Tabanları aynı, üsleri farklı iki üslü çokluğun çarpımı, tabanı aynı, üssü bu iki üslü çokluğun üsleri toplamı olan bir üslü çokluktur.

Tabanları aynı, üsleri farklı iki üslü çokluk  $a^m, a^n$  olsun.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a)}_{m \text{ tane}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_{n \text{ tane}}$$

İki taraftan parantezler kaldırılabilirinden

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \dots a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{m+n \text{ tane}}$$

$(m+n)$  tane  $a$  nin çarpımı üslü çokluğun tanımına göre  $a^{m+n}$  olduğundan

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

bulunur.

**İhtar.** — Yukarıdaki ispat birçok çarpanlar için tekrarlanabileceğinden :

$$a^m \cdot a^n \cdot a^l \dots a^p \cdot a^q = a^{m+n+l+\dots+p+q}$$

elde edilir.

**6. Karşıt olarak.** — Herhangibir üslü çokluk, tabanları aynı, üsleri toplamı bu üslü çokluğun üssüne eşit olmak üzere üslü çokluğun çarpımı şeklinde gösterilebilir.

Gerçekten,

$$a^{m+n+l+\dots+p+q} = a^m \cdot a^n \cdot a^l \dots a^p \cdot a^q$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülür.

**7. Tabanları farklı, üsleri aynı olan üslü çoklukların çarpımı.**

**Teorem.** — Tabanları farklı, üsleri aynı olan iki üslü çokluğun çarpımı, tabanı tabanlar çarpımı, üssü ortak üs olan bir üslü çokluktur.

$$a^m \cdot b^m = (\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a \cdot a}_m \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots b \cdot b}_m)$$

dir. Bir çarpımda çarpanların yerleri değiştirilebileceğinden her  $a$  nin yanına bir  $b$  getirilerek:

$$a^m \cdot b^m = (\underbrace{a \cdot b}_m \cdot \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_{m-1} \cdot (a \cdot b))$$

olur.  $m$  tane  $(a \cdot b)$  nin çarpımı tanıma göre  $(a \cdot b)^m$  olduğundan

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$$

bulunur.

8. Karşıt olarak. — Çarpım şeklindeki bir üslü çokluk, tabanları çarpanlardan her biri, üsleri ortak üs olan üslü çoklukların çarpımı şeklinde gösterilebilir.

Gerçekten,

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

şeklinde yazılabilceği kolayca görülür.

**İhtar.** — Yukarıdaki ispat birçok çarpanlar şeklinde de tekrarlanabileceğinden:

$$\boxed{a^m \cdot b^m \cdot c^m \dots k^m = (a \cdot b \cdot c \dots k)^m}$$

elde edilir.

### ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$1^\circ a^5 \cdot a^3$$

$$4^\circ ab^4 \cdot ba^3 \cdot ab$$

$$7^\circ (-a)^7 \cdot a^2$$

$$10^\circ (-a)^{4n} \cdot (-a)$$

$$13^\circ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$16^\circ (xy)^2 \cdot (ab^3)^2$$

$$19^\circ (2a+3b)^4 \cdot (2a-3b)^4$$

$$2^\circ a^9 \cdot a$$

$$5^\circ (-a)^2 \cdot (-a)^3$$

$$8^\circ (-a)^{2n} \cdot a$$

$$11^\circ (-x)^{2m+1} \cdot (-x)$$

$$14^\circ \left(1\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^4$$

$$17^\circ (a+2)^3 \cdot (a-2)^3$$

$$20^\circ (a+b)^2 \cdot (a^2-ab+b^2)^2$$

$$3^\circ x^3 \cdot x^5 \cdot x^7$$

$$6^\circ (-a)^8 \cdot (+a)^7$$

$$9^\circ (-a)^6 \cdot (-a)^3$$

$$12^\circ (-a)^{2n-3}$$

$$15^\circ (-ab)^5 \cdot (-cd)^5$$

$$18^\circ (a^2b^3)^4 \cdot (3ab^2)^4 \cdot (2a^2b)^4$$

$$21^\circ (a-1)^3 \cdot (a^2+a+1)^3$$

*Fazla*

### BÖLME

X  
9. Teorem. — Tabanları aynı, üsleri farklı olan  $\frac{a^m}{a^n}$  gibi iki üslü çokluğun bölümünde :

$$1^\circ m > n \text{ ise, } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$2^\circ m = n \text{ ise, } \frac{a^m}{a^n} = 1$$

$$3^\circ m < n \text{ ise, } \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \text{ dir.}$$

$$1^\circ m = n + p \text{ farz edelim,}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{n+p}}{a^n} = \frac{a^n a^p}{a^n} = a^p$$

olur.  $p = m - n$  olduğundan yerine konarak

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

$$2^\circ m = n \text{ olduğundan}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1}$$

$$3^\circ n = m + p \text{ konularak}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{a^m}{a^m a^p} = \frac{1}{a^p} \quad \text{ve} \quad p = n - m \text{ olduğundan}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}}$$

elde edilir.

10. Tabanları farklı, üsleri aynı olan iki üslü çöklüğün bölümü.  
 Teorem. — Tabanları farklı, üsleri aynı olan iki üslü çöklüğün bölümü, tabanı tabanlar bölümü, üssü ortak üs olan bir üslü çökluktur.

$$\frac{a^m}{b^m} = \underbrace{\frac{a \cdot a \cdot a \dots a \cdot a}{b \cdot b \cdot b \dots b \cdot b}}_{m \text{ tane}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \dots \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}}_{m \text{ tane}}$$

şeklinde yazılabilir ve  $m$  tane  $a/b$  nin çarpımı  $\left(\frac{a}{b}\right)^m$  olacağından

$$\boxed{\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

elde edilir.

11. Karşıt olarak. — Bir bölümün herhangibir kuvveti payının aynı kuvveti ile paydasının aynı kuvveti bölümüne eşittir.

Gerçekten,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülür.

### ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki bölmeleri hesaplayınız:

$$1^\circ \quad \frac{a^5}{a^3}$$

$$2^\circ \quad \frac{a^{17}}{a^{12}}$$

$$4^\circ \quad \frac{a^5}{a^{12}}$$

$$5^\circ \quad \frac{a}{a^7}$$

$$3^\circ \quad \frac{a^{42}}{a^{35}}$$

$$6^\circ \quad \frac{x^m}{x^7}$$

$$7^\circ \quad \frac{x}{x^{n+1}}$$

$$8^\circ \quad \frac{x^8}{x^{m+3}}$$

$$9^\circ \quad \frac{x^{m+1}}{x^{m-1}}$$

$$10^\circ \quad \frac{a^{7-x}}{a^{5+x}}$$

$$11^\circ \quad \frac{a^{m+2} \cdot b^{m+2}}{a^m \cdot b^m}$$

2. Aşağıdaki bölmeleri yapınız:  $\boxed{Q. 6/m. 2}$

$$1^\circ \quad \frac{10^4}{5^4}$$

$$2^\circ \quad \frac{169^3}{13^3}$$

$$3^\circ \quad \left(\frac{1}{3}\right)^5 : \left(\frac{1}{6}\right)^5$$

$$4^\circ \quad \frac{(5x-5y)^8}{(x-y)^8}$$

$$5^\circ \quad \frac{(5a-10b)^m}{(3a-6b)^m}$$

$$6^\circ \quad (a^2+2ab+b^2)^m : (a+b)^m$$

$$7^\circ \quad (a^4-2a^2+1)^m : (a^2-1)^m$$

$$8^\circ \quad (a^3+b^3)^x : (a+b)^x$$

### ÜSLÜ ÇÖKLÜKLARIN KUVVETİ

12. Teorem. — Herhangibir üslü çöklüğün bir kuvvetini almak için üsler çarpılarak aynı tabana üs verilir.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \dots a^m}_{n \text{ tane}}$$

$$= \underbrace{a^{m+m} \dots m}_{n \text{ tane}}$$

şeklinde yazılabileceğinden:

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

bulunur.

13. Karşıt olarak. — Bir  $a$  çöklüğünün  $m \cdot n$  yinci kuvvetini almak için,  $a$  nin önce  $m$ , sonra  $n$  yinci veya önce  $n$ , sonra  $m$  yinci kuvveti alınır.

Gerçekten,

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülür.

12  
35  
07

## ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$1^{\circ} (2^3)^5 \quad \boxed{1024}$$

$$2^{\circ} (3^4)^7$$

$$4^{\circ} (-a^5)^2$$

$$5^{\circ} (-a^2)^5$$

$$7^{\circ} (-a)^{1-n-2}$$

$$8^{\circ} (-a^3)^{2m}$$

$$10^{\circ} \left( \frac{x^3y^2}{a^3b^2} \right)^5$$

$$11^{\circ} \frac{(x^2y^3)^6}{(y^nx^3)^{12}} \quad \times$$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$1^{\circ} \cancel{\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}}$$

$$\cancel{2^{\circ}} \frac{1}{x^4} + \frac{2-x}{x^5}$$

$$3^{\circ} \cancel{(x^5+x^3)^2}$$

$$\cancel{4^{\circ}} (x^5-x^3)^2$$

$$5^{\circ} (x^5-x^3)(x^5+x^3) \cancel{x}$$

$$\cancel{6^{\circ}} (a^x+b^y)^2$$

$$7^{\circ} (a^x-b^y)^2$$

$$\cancel{8^{\circ}} (a^x-b^y)(a^x+b^y)$$

## ÜSSÜ SIFIR VE NEGATİF OLAN ÜSLÜ ÇOKLUKLAR

14. Üssü sıfır olan çokluklar. —  $m=n$  olduğu takdirde  $\frac{a^m}{a^n}=1$  olduğunu görmüştük. Fakat,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

esitliğinin bir anlamı yoktur. Bu eşitliğin doğru kalması için

$$\boxed{a^0 = 1}$$

eşitliğini kabul etmemiz gereklidir. Ohalde, tanım olarak:

Üssü sıfır olan çokluklar 1'e eşittir.

## ALIŞTIRMALAR

15. Üssü negatif olan çokluklar. —  $m > n$  olduğu takdirde  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  olduğunu gördük.  $m < n$  ise,  $a^{m-n}$  nin bir anlamı yoktur. Fakat,  $m < n$  olsa da yukarıdaki eşitliğin doğruluğunu kabul edeceğiz.  $p$  pozitif tamsayı olmak üzere  $n = m+p$  konursa,

$$a^{m-n} = a^{m-(m+p)} = a^{-p}$$

olur. Diğer taraftan,

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}} = \frac{1}{a^p} \quad \text{olduğundan}$$

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

bulunur. Ohalde, tanım olarak:

Üssü negatif olan bir çokluk, payı 1, paydası kendisinin pozitif üslüsü olmak üzere bir kesir şeklinde yazılabilir.

## ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$1^{\circ} \cancel{5 \cdot 3^{-2}}$$

$$\cancel{2^{\circ}} 6 \cdot 2^{-3}$$

$$\cancel{3^{\circ}} 7 \cdot 5^{-1}$$

$$4^{\circ} \left( \frac{1}{2} \right)^{-2}$$

$$5^{\circ} \left( \frac{1}{3} \right)^{-3}$$

$$\cancel{6^{\circ}} 6 \left( \frac{1}{2} \right)^{-3}$$

$$\cancel{7^{\circ}} \frac{1}{2^{-2}}$$

$$\cancel{8^{\circ}} \frac{2}{3^{-3}}$$

$$9^{\circ} \frac{3}{3^{-4}}$$

$$10^{\circ} (0,2)^{-2}$$

$$11^{\circ} (0,5)^{-1}$$

$$12^{\circ} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{-3}$$

$$13^{\circ} (0,01)^{-1}$$

$$14^{\circ} 5(-2)^{-1}$$

$$\cancel{15^{\circ}} 12 \left( \frac{3}{2} \right)^{-2}$$

2. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$\cancel{1^{\circ}} a^0 m^2$$

$$\cancel{2^{\circ}} 5x^0$$

$$\cancel{3^{\circ}} 2(a+b)^0$$

$$4^{\circ} (a^0)^n$$

$$5^{\circ} 1^{-n}$$

$$6^{\circ} \left( \frac{1}{a} \right)^{-1}$$

$$7^{\circ} a^5 \cdot a^{-3}$$

$$8^{\circ} x^{-4} \cdot x^2$$

$$9^{\circ} 3a^{-3} \cdot a^{-2}$$

$$10^{\circ} \frac{a^{-2} b^3}{a^3 b^{-4}}$$

$$11^{\circ} \frac{36a^{-2} b^{-3} c^{-1}}{42x^{-3} y^{-2} z}$$

$$12^{\circ} \frac{3}{5} a^{-3} : \frac{6}{5} a^{-2}$$

$$13^{\circ} (a-b)^{-2} : (a-b)^{-3}$$

$$14^{\circ} (-a^{-2})^{-2n}$$

$$15^{\circ} (-a)^{-(2n+1)}$$

$$16^{\circ} (-a^{2n-1})^{-3}$$

## BÖLÜM II

### KÖKLÜ ÇOKLUKLAR

**16. Tanım.** — Herhangibir A sayısının  $m$ inci kuvvetten kökü, öyle bir  $x$  sayısıdır ki,  $x$  in  $m$ inci kuvveti A ya eşittir.

Yani  $x$ , A nin  $m$ inci kuvvetten kökü ise,  $x^m = A$  dir. A nin  $m$ inci kuvvetten kökü :

$$\sqrt[m]{A}$$

şeklinde yazılır ve «A nin  $m$ inci kuvvetten kökü» diye okunur.

$m=2$  ise  $x = \sqrt{A}$  dir. Buna özel olarak «A nin kare kökü»

$m=3$  »  $x = \sqrt[3]{A}$  » » » «A nin küb kökü» denir; Yukarıdaki tanıma göre

$$(\sqrt[m]{A})^m = A$$

dir. Bu bağıntı, kök ve kuvvet alma işlemlerinin birbirinin tersi olan iki işlem olduğunu gösterir.

**Örnekler :**

$$(\mp 3)^2 = 9$$

$$\text{olduğundan } \sqrt{9} = \mp 3 \text{ dür.}$$

$$(\mp 2)^4 = 16$$

$$\text{» } \sqrt[4]{16} = \mp 2 \text{ dir.}$$

$$(+4)^3 = 64$$

$$\text{» } \sqrt[3]{64} = +4 \text{ dür.}$$

$$(-4)^3 = -64$$

$$\text{» } \sqrt[3]{-64} = -4 \text{ dür.}$$

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü üzere pozitif bir sayının çift veya tek kuvvetten kökü ve negatif bir sayının tek kuvvetten kökü alınabilir.

Negatif bir sayının çift kuvvetten kökü gerçek bir sayı değildir.

Cünkü,  $\sqrt{-4} = x$  veya  $x^2 = -4$  bağıntısına uyan gerçek bir  $x$  de- geri yoktur. Bu çeşit sayılara sanal sayılar denir ve  $\sqrt{-1} = i$  şeklinde tanımlanır.  $a \mp bi$  şeklindeki sayılara da karmaşık sayılar denir.

**17. Köklü çoklukların toplaması.** — Benzer (kök içi ve kök kuvveti aynı olan) köklü çoklukların cebirsel toplamı, bunların katsayılarının cebirsel toplamı katsayı olmak üzere bir benzer köklü çokluktur.

**Örnekler :**

$$\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = (1+3+5-7)\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 6\sqrt{a} = \sqrt{a}$$

$$5^3\sqrt{a^2} + 4\sqrt{a} + 7^3\sqrt{a^2} + 2\sqrt{a} - 8\sqrt{a} = 12^3\sqrt{a^2} - \sqrt{a}.$$

**18. Bir çarpımın kökü.** — Bir çarpımın herhangibir kuvvetten kökü çarpanların bu kuvvetten kökleri çarpımına eşittir.

Yani :

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

dir.  $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$  alalım ve  $x^n$  yi hesaplayalım :

$$\begin{aligned} x^n &= (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n \\ &= abc \text{ olup } x = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} \end{aligned}$$

olacağından

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

elde edilir.

**19. Karşıt olarak.** — Kök kuvvetleri aynı olan köklü çoklukların çarpımı, bu çoklukların çarpımlarının aynı kuvvetten köküne eşittir.

**Örnek :**

Gerçekten, yukarıda yapılan ispat tekrarlanırsa :

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c}$$

şeklinde yazılabileceği kolayca görülür.

**Örnek :**

$$\sqrt{19600} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 7 \cdot 10 = 140.$$

## ALISTIRMALAR

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$\times 1^{\circ} 6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\times 2^{\circ} \sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6}$$

$$\times 3^{\circ} 2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$$

$$\times 4^{\circ} \sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$$

$$\times 5^{\circ} \sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$$

$$8^{\circ} 2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$10^{\circ} \sqrt{18a^3b^3} + \sqrt{50a^3b^3}$$

2. Aşağıdaki çarpımları yapınız:

$$1^{\circ} \sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$$

$$\times 2^{\circ} \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$3^{\circ} 2\sqrt{27} \cdot 3\sqrt{6}$$

$$\times 4^{\circ} 8\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\times 5^{\circ} (3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$$

$$\times 6^{\circ} (7 + 2\sqrt{6})(9 - 5\sqrt{6})$$

$$7^{\circ} (6 + 12\sqrt{7})(3 - 5\sqrt{7})$$

$$9^{\circ} (9 + 2\sqrt{10})(9 - 2\sqrt{10})$$

$$11^{\circ} (15 + \sqrt{7})(\sqrt{15} - \sqrt{7})$$

$$13^{\circ} (2\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$15^{\circ} (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2})$$

$$16^{\circ} (a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$$

$$\times 18^{\circ} \sqrt{\frac{ab + ac}{a^2 - ab}} \cdot \sqrt{\frac{a - b}{b + c}}$$

$$20^{\circ} (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

$$22^{\circ} (2\sqrt{3} + 1)^2$$

$$24^{\circ} \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$17^{\circ} (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$19^{\circ} \sqrt{\frac{5a(a^2 - x^2)}{21x}} \cdot \sqrt{\frac{7x(3a + 3x)}{a(5a - 5x)}}$$

$$21^{\circ} (1 - \sqrt{2})^2$$

$$23^{\circ} \sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

20. Bir bölümün kökü. — Bir bölümün herhangibir kuvvetten kökü, pay ve paydanın aynı kuvvetten kökleri bölümüne eşittir.

Yani

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ dir.}$$

$$x = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

diyelim ve her iki tarafın  $n$ inci kuvvetini alalım:

$$x^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

olacağından

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

bulunur. Şuhalde:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

elde edilir.

21. Karşıt olarak. — Kök kuvvetleri aynı iki çokluğun bölümü, bu çoklukların bölümünün aynı kuvvetten köküne eşittir.

Gerçekten, yukarıdaki eşitlikten

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

nin doğru olduğu görülür.

Örnekler :

$$\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3a^2}}{\sqrt{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

## ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki bölmeleri yapınız:

$$1^{\circ} \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$2^{\circ} \sqrt[3]{\frac{27}{8}}$$

$$3^{\circ} \sqrt{\frac{11}{9}}$$

$$4^{\circ} \sqrt[3]{\frac{343}{1000}}$$

$$5^{\circ} \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$$

$$6^{\circ} \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}}$$

$$7^{\circ} \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$$

$$8^{\circ} \frac{\sqrt{363}}{\sqrt{3}}$$

$$9^{\circ} \frac{3}{5} : \sqrt{18}$$

$$10^{\circ} \frac{2}{3} \sqrt{40} : \frac{8}{9} \sqrt{5}$$

$$11^{\circ} (\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4) : \sqrt{8}$$

$$12^{\circ} (2\sqrt{32} + 2\sqrt{2} + 4) : 4\sqrt{8}$$

$$13^{\circ} (14 - \sqrt{15} - 7\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) : (7 + \sqrt{5})$$

$$14^{\circ} \sqrt{\frac{x}{y}} : \sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$15^{\circ} \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{a^2}} : \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{a}}$$

$$16^{\circ} \sqrt{\frac{a^3}{b^3} - \frac{b^3}{a^3}} : \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$$

**22. Bir kuvvetin kökü, bir kökün kuvveti.** —  $a^p$  nin  $n$ inci kuvvetten kökü,  $a$  nin  $n$ inci kuvvetten kökünün  $p$ inci kuvvetine eşittir. Yani

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$$

dir.

Her iki tarafın  $n$ inci kuvveti alınırsa eşit olduğu görülmektedir. Bu özelliğin karşıtı da doğrudur.

**Örnekler:**

$$\sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{a \cdot a \cdot a} = \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = (\sqrt[5]{a})^3$$

$$(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3}$$

$$(\sqrt[3]{a^2})^4 = \sqrt[3]{a^8}$$

**23. Bir kökün kökü.** — Bir  $a$  çokuğunun önce  $p$ , sonra  $m$ inci kuvvetten kökü, bu çokuğun  $mp$ inci kuvvetten köküne eşittir.

Yani,

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a}$$

dir.

Örnek:  $x = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$  olsun.  $x^4 = (\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}})^4 = \sqrt[3]{a}$

$$x^{12} = (x^4)^3 = (\sqrt[3]{a})^3 = a$$

olduğundan

$$x = \sqrt[12]{a} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}$$

olur. Şimdi genel olarak yukarıdaki formülü gerçekleyelim:

$$x = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$$

alalım.

$$x^m = (\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}})^m = \sqrt[p]{a}$$

$$x^{mp} = (x^m)^p = (\sqrt[p]{a})^p = a$$

olup

$$\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[mp]{a}$$

bulunur.

Bu özelliğin karşıtı da doğrudur.

**24. Bir kuvvetin kökünün kısaltılması.** — Bir köklü çokuğun üssü ve kök kuvveti aynı sayı ile çarpılabilir veya bölünebilir. Yani,

$$\sqrt[mp]{a^np} = \sqrt[m]{a^n}$$

dir. Gerçekten, her iki tarafın  $mp$ inci kuvveti alınırsa eşitlik sağlanmış olur.

**Örnekler:**

$$\text{I. } \sqrt[10]{a^{15}} = \sqrt[2,5]{a^{3,5}} = \sqrt[5]{(a^3)^5} \\ = \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$$

$$\text{II. } \sqrt[4]{a^2} = \sqrt{a}$$

$$\text{III. } \sqrt[10]{a^{35}} = \sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} = a^3 \cdot \sqrt{a}$$

$$\text{IV. } \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[15]{a^4} = \sqrt[15]{a^6 \cdot a^4} \\ = \sqrt[15]{a^6 \cdot a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

## ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki köklü ifadeleri sadeleştiriniz:

$$\begin{array}{ccccc} 1^{\circ} \sqrt[4]{36^3} & 2^{\circ} \sqrt[4]{49^3} & 3^{\circ} \sqrt[3]{25^3} & 4^{\circ} \sqrt[4]{4^7} & 5^{\circ} \sqrt[4]{16^5} \\ 6^{\circ} \sqrt[3]{8^4} & 7^{\circ} \sqrt[3]{27^5} & 8^{\circ} \sqrt[3]{64^2} & 9^{\circ} \sqrt[4]{16^5} & 10^{\circ} \sqrt[4]{81^3} \end{array}$$

2. Aşağıdaki köklü ifadeleri sadeleştiriniz:

$$\begin{array}{ccc} 1^{\circ} \sqrt[3]{2\sqrt{2}} & 2^{\circ} \sqrt[3]{9\sqrt{3}} & 3^{\circ} \sqrt[3]{27\sqrt{5}} \\ 4^{\circ} \sqrt[3]{\frac{1}{64} \cdot \sqrt{2}} & 5^{\circ} \sqrt[3]{2^7 \cdot \sqrt{2}} & 6^{\circ} \sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \end{array}$$

3. Aşağıdaki köklü sayıların kök üslerini eşitleyerek karşılaştırınız:

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ} \sqrt[3]{3}, \sqrt{2} & 2^{\circ} \sqrt[3]{11}, \sqrt{5} \\ 3^{\circ} \sqrt{6}, \sqrt[3]{15} & 4^{\circ} \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4} \end{array}$$

4. Aşağıdaki problemleri kök üslerini eşitleyerek yapınız:

$$\begin{array}{ccc} 1^{\circ} \sqrt[4]{4} : \sqrt[6]{8} & 2^{\circ} \sqrt[2]{27} : \sqrt[4]{9} & 3^{\circ} \sqrt[12]{125} : \sqrt[6]{25} \\ 4^{\circ} (\sqrt{8} + \sqrt[4]{4}) : \sqrt{2} & 5^{\circ} (2\sqrt{32} + 3\sqrt{2} + \sqrt[4]{4}) : \sqrt[4]{8} \end{array}$$

25. Kesirli üsler. —  $\sqrt[n]{a^m}$  yi, bir üslü çöklük şeklinde yazmak isteyelim.  $m = np$  farz ederek:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{np}} = \sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p = a^{\frac{m}{n}}$$

bulunur.  $m, n$  ile bölünemiyorsa,  $\frac{m}{n}$  bir kesir olur. Bu takdirde,

$\frac{m}{n}$  nin bir anlamı kalmaz.  $m$  ve  $n$  tam ve pozitif sayıları ne olursa olsun,  $\sqrt[n]{a^m}$  ile  $a^{\frac{m}{n}}$  aynı değerde olduğu kabul edilir. Ohalde, tanım olarak:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

seklini alır.

Karşıt olarak:  $a^{\frac{m}{n}}$  yi köklü çöklük şeklinde yazmak için,  $a$  nin  $m$  yinci kuvvetinin  $n$  yinci kuvvetten kökü alınır.

## Alıştırmalar

## Örnekler: I. —

Aşağıdaki köklü çöklükleri üslü çöklükler şeklinde gösteriniz:

$$\sqrt[4]{a^3} = a^{3/4}; \quad \sqrt[3]{a} = a^{1/3}$$

$$\sqrt[5]{(a+b)^3} = (a+b)^{3/5}.$$

II. — Aşağıdaki üslü çöklükleri köklü çöklükler şeklinde gösteriniz:

$$a^{1/2} = \sqrt{a}; \quad a^{2/5} = \sqrt[5]{a^2}; \quad a^{-1/2} = \frac{1}{a^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$(8a^3b^3)^{2/3} = \sqrt[3]{(8a^3b^3)^2} = (\sqrt[3]{8a^3b^3})^2 = (2ab)^2 = 4a^2b^2 \text{ bulunur.}$$

## ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$1^{\circ} 36^{3/2} \quad 2^{\circ} 4^{-7/2} \quad 3^{\circ} 9^{-0.5} \quad 4^{\circ} 16^{-1/2} \quad 5^{\circ} 25^{-0.5}$$

$$6^{\circ} 49^{3/2} \quad 7^{\circ} 4^{-7/2} \quad 8^{\circ} 27^{1/3} \quad 9^{\circ} 125^{1/3} \quad 10^{\circ} 64^{1/3}$$

$$11^{\circ} 8^{-1/3} \quad 12^{\circ} (a^2 + 2ab + b^2)^{1/2} \quad 13^{\circ} (a^2 - 4a + 4)^{1/2}$$

$$14^{\circ} \left(1 \frac{3}{4}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{8}{11}\right)^{1/2} \cdot 11^{1/2} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{1/2} \quad 15^{\circ} (a^{1/2} + b^{1/2}) - 4a^{1/2}b^{1/2}$$

$$16^{\circ} (x^{1/2} + 2y^{1/2})(x^{1/2} - 2y^{1/2}) \quad 17^{\circ} (a^{1/3} - b^{1/3})(a^{1/3} + b^{1/3}).$$

26. Kesirlerin paydalarını rasyonel yapmak. — Bir kesrin paydasını rasyonel yapmak bu kesrin değerini bozmadan paydasındaki kökleri kaldırmak demektir.

Birinci tip — 1°  $\frac{a}{\sqrt{b}}$  kesrinin paydasını rasyonel yapalım. Bir kesrin pay ve paydası aynı sayı ile çarpılabilceğinden

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

bulunur.

$$2^{\circ} \frac{a}{\sqrt[n]{b}} \text{ kesrinin paydasını rasyonel yapalım:}$$

$$\frac{a}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{b^{n-1}}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-1}}}{b} \text{ bulunur.}$$

Daha fazla

$a + \sqrt{b}$  ve  $a - \sqrt{b}$  veya  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  ve  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  şeklindeki ifadeler eşlenik ifadeler denir.

İkinci tip. —  $\frac{m}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$  şeklindeki ifadelerin paydasını rasyonel yapmak için, bu kesrin pay ve paydasını paydanın eşleniği ile çarpmalıdır:

$$1^{\circ} \frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

$$2^{\circ} \frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

$$3^{\circ} \frac{m}{a + \sqrt{b}} = \frac{m(a - \sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \frac{m(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

$$4^{\circ} \frac{m}{a - \sqrt{b}} = \frac{m(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{m(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

### UYGULAMALAR

Aşağıdaki kesirlerin paydalarını rasyonel yapınız:

$$1^{\circ} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2^{\circ} \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$3^{\circ} \frac{x}{n\sqrt{x^{n-1}}}$$

$$4^{\circ} \frac{a}{a\sqrt{a^5}}$$

$$5^{\circ} \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$6^{\circ} \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$7^{\circ} \frac{1}{-1 \pm \sqrt{5}}$$

$$8^{\circ} \frac{7}{\sqrt{8} - 2}$$

$$9^{\circ} \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$$

$$10^{\circ} \frac{5 - 7\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$11^{\circ} \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$$

$$12^{\circ} \frac{1}{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}$$

### Köklü çöklükler üzerine karışık alıştırmalar

1. Aşağıdaki köklü çöklükleri sadeleştiriniz:

$$1^{\circ} \sqrt{8} : \sqrt{2} ; \sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} ; \sqrt{12} : \sqrt{3} ; \sqrt{44} : \sqrt{11}$$

$$2^{\circ} \sqrt{\frac{10}{3}} : \sqrt{\frac{15}{2}} ; \sqrt{\frac{1}{6}} : \sqrt{\frac{1}{360}} ; \sqrt{\frac{3}{5}} : \sqrt{\frac{5}{27}}$$

$$3^{\circ} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} : \sqrt{\frac{a+b}{(a-b)^3}} ; \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}} : \sqrt[3]{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^6}}$$

2. Aşağıdaki köklü çöklükleri sadeleştiriniz:

$$1^{\circ} \sqrt{ab^2} : \sqrt[3]{a^3b} : \sqrt[6]{ab} : \sqrt[3]{ab} ; 2^{\circ} \sqrt[4]{2a^3} : \sqrt[10]{a^7} : \sqrt[5]{2a^2}$$

$$3^{\circ} \sqrt[5]{a^2} : \sqrt[3]{ab^2} : \sqrt[6]{ab} : \sqrt[6]{a^3b^4} ; 4^{\circ} \sqrt[8]{a^3} : \sqrt[6]{ab^3} : \sqrt[4]{ab}$$

$$5^{\circ} \sqrt[15]{\frac{x+1}{3xy}} ; 2^{\circ} \sqrt[21]{\frac{6x^2y^3}{(x+1)^3}} ; 6^{\circ} \sqrt[3]{4x^2 - 9} : \sqrt[6]{\frac{2x+3}{2x-3}}$$

3. Aşağıdaki köklü çöklükleri sadeleştiriniz:

$$1^{\circ} \sqrt{\sqrt{4}} ; \sqrt[3]{\sqrt{8}} ; \sqrt[4]{\sqrt[5]{9}} ; \sqrt[7]{\sqrt[3]{81}}$$

$$2^{\circ} \sqrt[3]{\sqrt[3]{12}} ; \sqrt[3]{\sqrt{a}} ; \sqrt[4]{\sqrt{a^9}} ; \sqrt[3]{\sqrt[3]{a^5b^2}}$$

$$3^{\circ} \sqrt{3\sqrt{3}} ; \sqrt{2\sqrt[3]{2}} ; \sqrt[3]{2\sqrt{2}} ; a\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a}}$$

$$4^{\circ} \sqrt{x\sqrt{y}} ; \sqrt{y\sqrt{x}}.$$

4. Aşağıdaki köklü çöklükleri sadeleştiriniz:

$$1^{\circ} \sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{48} ; \sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{45}$$

$$2^{\circ} \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{50} ; \sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{128}$$

$$3^{\circ} \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - 1/3 \sqrt[3]{3} ; 3\sqrt{18} - 7\sqrt{2} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{8}.$$

### KAREKÖK ALMAK

27. Bir sayının karekökünün rakamları sayısı. — Bir sayının karekökünü almadan bunun kaç rakamlı bir sayı olacağını kolayca bulabiliriz:

Bir veya iki rakamlı sayılar 1 ile 100 arasında bulunduklarından, bunların kareköklerinin 1 ile 10 arasında, yani 1 rakamlı bir sayı olduğu bilinir. 3 veya 4 rakamlı sayılar 100 ile 10 000 arasında olduğundan karekökleri 10 ile 100 arasında olup 2 rakamlıdır. Şuhalde, genel olarak  $(2n-1)$  veya  $2n$  rakamlı bir sayının karekökü  $n$  rakamlıdır. Bu sebeple, karekökü alınacak sayı sağдан itibaren ikişer ikişer grulara ayrılır. Bu grulardan her birine karekökte bir sayı karşı gelir. En solda kalan grup bir veya iki rakamlı olabilir.

Karekökü alınacak sayı tam kare ve 1 ile 100 arasında ise, çarpım (kerrat) cetveli ile karekök hemen bulunabilir. Örnek: 49 sayısının karekökü 7 dir. Çünkü  $7^2 = 49$  dur.

Şimdi karekökü iki rakamlı bir sayı verecek olan sayının karekökünü nasıl alacağımızı inceleyelim: İki rakamlı bir sayı  $yx$  şeklinde olsun.  $x$  birler basamağı,  $y$  de onlar basamağındaki sayı olduğundan bu sayıyı  $(10y + x)$  şeklinde yazabiliz. Şuhalde, karekökü  $(10y + x)$  olan sayı  $(10y + x)^2$  dir. Bunu açalım:

$$\begin{aligned}(10y + x)^2 &= 100y^2 + 2 \cdot 10xy + x^2 \\ &= 100y^2 + (20y + x)x.\end{aligned}$$

Bu kuralı gözönünde tutarak 3 249 sayısının karekökünü arayalım:

$$(10y + x)^2 = 100y^2 + (20y + x)x = 3 249$$

İki tarafın karekökünü alalım:

$10y = 50, x = 7$	$10y + x = 50 + 7 = 57$
$100y^2 + (20y + x)x =$	$2500 + 749$
$- 100y^2$	$= 2500$
$(20y + x)x : 20y \sim x$	$0 + 749$
$(20y + x)x$	$(100 + 7)7 = 749$
0	0

Yukarıdaki tabloda görüldüğü üzere 3 249 sayısının karekökünü almak için önce 3 249 sayısını 2 500 + 749 olarak iki parçaya ayıralım. Çünkü 50 nin karesi 2 500, 60 in karesi 3 600 olup, 3 600 verilen sayıdan büyiktür. Ohalde, aranan karekökün onlar rakamı 5 dir. Şuhalde,  $100y^2 = 2 500$  iki taraftan çıkarılarak bir tarafta  $(20y + x)x$ , diğer tarafta 749 kalır.  $(20y + x)x$ , 20  $y$  ye bölündürse yaklaşık olarak  $x$  elde edilir ki bu da 7 dir. İki taraftan  $(20y + x)x = (100 + 7)7 = 749$  çıkarılırsa her iki tarafta da 0 kalacağından aranan karekök 57 den ibarettir.

Karekökü üç veya daha çok rakamlı olan sayıların kareköklerinin bulunması aynen bu kurala göre yapılır. Buna göre, herhangibir sayının karekökünü almak için, yukarıdaki örnekten başka bir şey olmayan aşağıdaki pratik kuralı veriyoruz:

**28. Bir tamsayının karekökünü almak.** — Yapılacak işlemleri sıralayalım:

1° Karekökü alınacak sayı, sağdan başlanarak ikişer rakamlı gruplara ayrılır, son grup tek rakam da olabilir.

2° Sayının en soldaki grubunda bulunan sayının karekökünü alınır, eğer tam karekökü yoksa küçük olan yakın sayı seçilir. Bu, sayının, karekökünden soldan ilk rakamıdır. Bunun karesi sayının soldaki ilk grubundan çıkarılır.

3° Kalanın sağına, sonraki grup indirilir, böylece hasil olan sayının sağdan ilk rakamı bir virgül ile ayrılır; geri kalan sayı, karekökün ilk bulunan rakamının iki katına bölünür.

4° Elde edilen bölüm karekökün soldan ikinci rakamı veya bundan bir büyük rakamıdır. Karekökün bulunan ilk rakamının iki katı alınarak bundan evvel bulunan bölüm bunun önüne konur. Böylece bulunan sayının bölüm olarak bulunan sayı ile çarpımı kalana eşit veya daha küçükse bu sayı kökün soldan ikinci rakamı olarak bulunur. Bulunan bu çarpım kalandan büyükse, sıra ile bu sayıdan birer sayı küçük olan sayılar denenir.

Kareköke ait olan iki rakamın verdiği sayı için 3 ve 4 de söylenen işlemler karekökün bütün rakamlarını buluncaya kadar devam edilir.

Eğer karekökü alınacak sayı tam kare değilse yine aynı yoldan gidilerek bu sayının bir yakın yaklaşık karekökü bulunur. Daha yaklaşık karekök bulunmak istenirse son kalanın önüne iki sıfır konup bulunan bire yakın karekökte bir virgül ile ayrılarak yukarıda anlatıldığı şekilde işleme devam edilir.

**II. Ondalık sayıların karekökünü bulmak.** — Böyle bir kesrin karekökünü almak için virgülden itibaren sayı sağ ve sola doğru ikişer ikişer gruplandırılır. Kesir kısmı sağdan tek rakam kalırsa önüne bir sıfır konarak çift rakamlı yapılır ve yukarıda söylendiği şekilde karekökü alınır.

**Örnekler.** —

1 —

859

$\sqrt{737881}$	165	1709
64	5	9
97,8	825	15381
82,5		
1538,1		
1538,1		
	0	

## II.

14,2

	201,64	24	282
-1		4	2
	10,1	96	564
	9,6		
	56,4		
	56,4		
	0		

## ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sayıların kareköklərini bulunuz:

$$361, \quad 8\ 281, \quad 40\ 304, \quad 806\ 404, \quad 1\ 018\ 081, \quad \cancel{1\ 500\ 625}, \quad 46\ 022\ 656.$$

2. Aşağıdaki kesirlerin kareköklərini bulunuz:

$$\frac{25}{36}, \quad \frac{400}{576}, \quad \frac{3\ 873\ 024}{1\ 002\ 001}.$$

3. Aşağıdaki sayıların kareköklərini bulunuz:

$$0,163216, \quad 0,2209, \quad 1,3225, \quad 924,16, \quad 0,186624.$$

4. 425; 1753; 358,46 sayılarının onda bire yakın hata ile kareköklərini bulunuz.

5. 3; 5; 3,14259 sayılarının binde bire yakın hata ile kareköklərini bulunuz.

6. Alanı, 125 metre uzunluğunda ve 83 metre genişliğinde bulunan bir dikdörtgenin alanına eşdeğerli olan bir karenin kenarının uzunluğunu yüzde bire yakın bir hata ile bulunuz.

7. Şu cebirsel toplamın karekök değerini hesaplayınız:

$$\frac{9}{64} + \frac{4}{25} - \frac{1}{4}$$

(Cevap: 9/40).

## BÖLÜM III

## LOGARİTMA

29. Tanım. —  $a$  ve  $A$  gibi pozitif iki sayı verildiğine göre  $a^x = A$  eşitliğine uyan  $x$  sayısına,  $A$  sayısının  $a$  tabanına göre logaritması denir ve

$$x = \log_a A$$

şeklinde gösterilir. Örnekler:

$$2^3 = 8, \quad 5^2 = 25, \quad 3^4 = 81, \quad 10^2 = 100$$

eşitliklerinden dolayı:

$$\log_2 8 = 3, \quad \log_5 25 = 2, \quad \log_3 81 = 4, \quad \log_{10} 100 = 2 \text{ dir.}$$

Ihtar. — Taban her ne olursa olsun, tabanın logaritması 1 dir. Gerçekten,  $a^x = a$  eşitliğini sağlayan  $x$  sayısı 1 dir.

## LOGARİTMANIN ÖZELLİKLERİ

30. Teorem. — Bir çarpımın logaritması, çarpanların logaritmlarının toplamına eşittir.

$A$  ve  $B$  sayılarını alalım.  $A$  nin  $a$  tabanına göre logaritması  $x$ ,  $B$  nin  $a$  tabanına göre logaritması  $y$  olsun. Ohalde:

$$a^x = A, \quad a^y = B \tag{1}$$

$$x = \log_a A, \quad y = \log_a B \tag{2}$$

dir. (1) bağıntılarını taraf tarafa çarpalım:

$$a^x \cdot a^y = A \cdot B$$

veya

$$a^{x+y} = A \cdot B$$

bulunur. Logaritmanın tanımına göre  $(x+y)$ ,  $A \cdot B$  nin logaritması, yani:

$$x + y = \log_a(A \cdot B)$$

olduğundan

$$\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

bulunur.

**31. Teorem.** —  $A^n$  nin logaritması  $n \cdot \log_a A$  dir.

Gerçekten,

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A \cdot A}_{n \text{ tane}}$$

olup, her iki tarafın logaritması alınırsa

$$\log_a A^n = \underbrace{\log_a A + \log_a A + \dots + \log_a A + \log_a A}_{n \text{ tane}}$$

$$\log_a A^n = n \cdot \log_a A$$

bulunur.

**32. Teorem.** —  $\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$  dir.

$B = \sqrt[n]{A}$  alalım. Her iki tarafın  $n$  inci kuvvetini alalım :

$$B^n = A$$

bulunur. İki tarafın logaritmasını alalım :

$$n \cdot \log_a B = \log_a A$$

buradan

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

bulunur.

**33. Teorem.** — Bir bölümün logaritması, bölünenin logaritması ile bölenin logaritmasının farkına eşittir.

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

dir. Çünkü,  $A$  nin logaritmasını  $x$ ,  $B$  nin logaritmasını  $y$  ile göstersek, tanıma göre

$$a^x = A, \quad a^y = B \quad (1)$$

ve

$$x = \log_a A, \quad y = \log_a B$$

dir. (1)'i taraf tarafa bölelim

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{A}{B}$$

veya

$$a^{x-y} = \frac{A}{B}$$

bulunur. Buradan  $x - y = \log_a \frac{A}{B}$  olup

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

elde edilir.

Bu teoremleri bir tablo şeklinde özetleyelim :

$$\log_a(A \cdot B \cdot C \cdot D \cdots L) = \log_a A + \log_a B + \log_a C + \log_a D + \dots + \log_a L$$

$$\log_a A^n = n \cdot \log_a A$$

$$\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B.$$

**34. Kullanılan logaritma sistemleri.** — Matematikte kullanılan iki çeşit logaritma vardır :

1° Birincide taban  $a = e = 2,718281\dots$  sayısı,

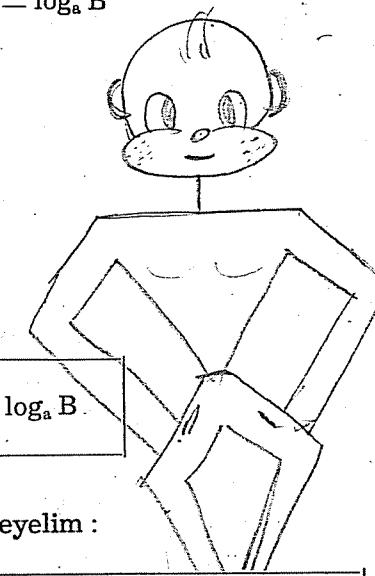
2° Diğerinde  $a = 10$

almır.

Birincisini Néper (1550 - 1617), ikincisini Briggs tertiplemiştir.

Birinci logaritma sisteme Néper logaritması veya tabii logaritma denir ve Yüksek Matematikte kullanılır.

İkincisine bayagi logaritma veya ondalik logaritma denir.



Biz bu logaritmayı kullanacağız ve herhangibir açıklama yapılmazsa logaritmadan amacın ondalık logaritma olduğunu anlayacağız.

**35. Ondalık logaritma.** — Bir logaritmada taban  $a=10$  alınacak olursa böyle logaritmaya ondalık logaritma denildiğini söylemiştim. Aşağıdaki sayılarla bunların logaritmalarını bir tabloda gösterelim:

Sayılar:  $10^{-p}, \dots, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots, 10^p$

Logaritmalar:  $-p, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, p$  dir. Burada görülmüyor ki:

$10^0 = 1$	in logaritması	0,
$10^1 = 10$	un	» 1,
$10^2 = 100$	ün	» 2,
$10^3 = 1000$	in	» 3,
.	.	.
.	.	.
$10^p = 100000\dots 0$	»	$p$

*p tane*

dir.

1 ile 10 arasında bir sayının logaritması	0 ile 1 arasında
10 ile 100 » » » » 1 ile 2 »	
100 ile 1000 » » » » 2 ile 3 »	
:	:
:	:
$10^{p-1} \gg 10^p$ » » » » $p-1 \gg p$ »	

dir. Suhalde, herhangibir sayının logaritmasının bir tam kısmı, bir de kesir kısmı vardır. Logaritmanın tam kısmına *karakteristik*, kesir kısmına *mantis* denir.

Yukarıdaki tablonun incelenmesinden:

1° 1 den büyük sayıların logaritmaları pozitif,

2° 1 den küçük sayıların logaritmaları negatif olduğunu görürüz.

Negatif sayıların logaritmaları yoktur.

### 36. Logaritmada karakteristik ve mantisin ayrılması.

$\log A = 3,41827$  olsun. Bunu şöyle yazabilirim:

$$\log A = 3 + 0,41827$$

*Karakteristik*      *Mantis*

$$\log B = -2,57683$$

$$= -2,57683 + 1 - 1 = -3 + (1 - 0,57683)$$

$$= -3 + 0,42317 = \overline{3,42317}$$

*Karakteristik*      *Mantis*

olarak yazılabileceği için herhangibir sayının mantisi daima pozitif alınır. Suhalde:

Bir sayının logaritmasının karakteristiği pozitif, negatif ve sıfır olabilir; fakat mantis asla negatif değildir.

**37. Pratik özellik.** — Bir A sayısının logaritması

$$\log A = 2,12785$$

olsun.  $A \cdot 10^p$  nin logaritması:

$$\log (A \cdot 10^p) = \log A + \log 10^p$$

yazılabilir.

$$\log 10^p = p$$

olduğundan

$$\log (A \cdot 10^p) = p + 2,12785$$

dir.

Simdi  $\frac{A}{10^p}$  nin logaritmasını inceleyelim:

$$\log \frac{A}{10^p} = \log A - \log 10^p = \log A - p$$

yazılabileceğinden

$$\log \frac{A}{10^p} = 2,12785 - p = (2-p) + 0,12785$$

bulunur. Ohalde:

**38. Teorem.** — Bir sayı 10 un herhangibir kuvveti ile çarpırsa veya bölünse, sayının logaritmasının mantisi değişmez.

$$\log 1846 = 3,26623$$

$$\log 18,46 = 1,26623$$

$$\log 0,01846 = \overline{2,26623}$$

dür.

*İşte! Sıfır mantis!*

**39. Karakteristiği aranması.** — 1 in logaritması 0 ve 10 un logaritması 1 olduğundan 1 ile 10 arasındaki sayıların meselâ, 7 nin logaritması 0 ile 1 arasında olup, 0,abcde gibi bir sayıdır.

Yine 10 ile 100 arasındaki bir sayının logaritması 1 ile 2 arasında olacağından meselâ, 68 in logaritması 1,mnprs gibi bir sayıdır.

Görülüyor ki: 7 nin logaritmasının karakteristiği 0; 68 sayısının logaritmasının karakteristiği 1 dir.

Aynı şekilde, 1 257 sayısı 1 000 ile 10 000 arasında olduğundan logaritmasının karakteristiği 3 dir.

**40. Pratik kural.** — 1 den büyük bir sayının logaritmasının karakteristiği, sayının rakamları sayısından bir eksiktir. Örnekler:

8	in logaritması	0,.....
23	»	1,.....
128	»	2,.....
...	»	
123 577	»	5,.....

dir.

#### 41. 1 den küçük sayıların karakteristiklerinin bulunması.

1	in logaritması	0
0,1	»	-1
0,01	»	-2
0,001	»	-3

olduğundan

1 ile 0,1 arasındaki sayıların logaritması -1 ile 0 arasında

0,1	»	0,01	»	»	»	-2	»	-1	»
0,01	»	0,001	»	»	»	-3	»	-2	»
....	»	....	»	»	»	....	»	....	»
....	»	....	»	»	»	....	»	....	»

bulunur. Logaritmaların mantisler daima pozitif alındığından meselâ, 0,6 nin logaritması

$$\log 0,6 = (-1) + 0,..... = 1,.....$$

dir. Aynı şekilde

$$\log 0,07 = (-2) + 0,..... = 2,.....$$

$$\log 0,00003 = (-5) + 0,..... = 5,.....$$

dir.

**42. Pratik kural.** — 1 den küçük bir sayının logaritmasının karakteristiğini bulmak için, ilk başlayan sayının solundaki sıfırlar sayıılır. Bu sıfırların sayısı, negatif olarak karakteristiği verir.

**43. Kologaritma.** — Bir sayının tersinin logaritmasına bu sayının kologaritması denir ve colog şeklinde yazılır:

$$\text{colog } A = \log \frac{1}{A} = \log 1 - \log A = 0 - \log A$$

dir.

**44. Kologaritmanın bulunması.** — Bir A sayısının logaritmasının karakteristiğini c ve mantisini m ile gösterirsek sayının logaritması:

$$\log A = c + m$$

dir.

$$\text{colog } A = -\log A = -(c + m) = -c - m$$

olur. Mantis negatif olamayacağından

$$\begin{aligned} \text{colog } A &= -c - m + 1 - 1 = -c - 1 + 1 - m \\ &= -(1 + c) + (1 - m) \end{aligned}$$

*Karakteristik Mantis*

bulunur.

**45. Kural.** — Bir sayının logaritması verildiğine göre, bu sayının kologaritmasını bulmak için, logaritmanın karakteristigine 1 eklenip işaret değiştirerek karakteristik alınır; logaritmanın mantisi 1 den çıkarılarak kologaritmanın mantisi bulunur.

**Örnekler:**

I. —

$$\log A = 3,78052$$

$$\begin{aligned}\operatorname{colog} A &= -3,78052 = -4 + (1 - 0,78052) \\ &= -4 + 0,21948 \\ &= \underline{4,21948}\end{aligned}$$

dir.

**II. —**

$$\log A = \underline{5,18792}$$

$$\operatorname{colog} A = \underline{4,81208}$$

**III. —**

$$\log A = \underline{0,30103}$$

$$\operatorname{colog} A = \underline{1,69897}$$

bulunur.

**46. Logaritma işlemleri.** — Bir logaritmanın mantisi pozitif, karakteristiği pozitif, negatif ve sıfır olabileceği düşünürlerek işlemler yapacağız. Mantisin daima pozitif olduğunu unutmayalım.

**47. Toplama.** — Birtakım sayıların logaritmaları karşı sütunda gösterilen sayılar olsun. Bunları toplamak için önce mantisler toplanır, mantislerden elde edilen tamsayı, karakteristiklerin cebirsel toplamına eklenir, bu toplam aranan karakteristiği verir.

$$\begin{array}{r} 5,42875 \\ 1,82439 \\ 3,51425 \\ 6,25227 \\ 2,20536 \\ \hline 1,22502 \end{array}$$

**48. Çarpma.** — Bir logaritmayı bir sayı ile çarpmak için önce bu sayı mantis ile çarpılır ve elde varsa bu sayının karakteristikle çarpımına eklenerek karakteristik bulunur. Örnek :

$$\underline{7,51527} \times 3$$

Ü alalım. 3'ü mantisle çarpalım, 54581 çıkar ve elde 1 kalır.  $3 \times (-7) = -21$  olup  $= -21 + 1 = -20$  olduğundan

$$\underline{7,51527} \times 3 = \underline{20,54581}$$

bulunur.

**49. Bölme.** —  $1^{\circ} \underline{8,52416}$  yi 4'e bölelim :

$$\begin{array}{r} \underline{8,52416} = \underline{-8 + 0,52416} \\ 4 \quad 4 \\ = \underline{2,13104} \end{array}$$

bulunur.

**2° Karakteristik bölünen sayının katı değilse aynı sayıları ekleyip çıkararak karakteristiği bölenin katı yapmalı, sonra bölmeye devam etmelidir.**

**Örnek :**  $\underline{7,25495}$  'i 5'e bölelim,

$$\underline{7,25495} = -10 + 3,25495$$

olduğundan

$$\begin{array}{r} \underline{7,25495} = \underline{-10 + 3,25495} \\ 5 \quad 5 \\ = -2 + 0,65099 = \underline{2,65099} \end{array}$$

bulunur.

### BES ONDALIKLI LOGARİTMA CETVELLERİ

**50. Logaritma cetveli,** sayıların logaritmalarının mantislerinin bulunduğu bir cetveldir. Bu cetvelde 1 den 10 000'e kadar sayıların logaritmalarının mantisleri vardır.

Cetvelin N harfinin bulunduğu sütunda 3 rakamlı sayılar, onun yanında ve hizalarında da bu sayılara karşı gelen logaritmaların mantisi vardır. Örnek : 286 sayısının logaritmasının mantisi 45637 olup

$$\log 286 = 2,45637$$

dir.

Sayı dört rakamlı ise, soldan üç rakamı N harfinin bulunduğu sütündan, dördüncü rakam, o sayfanın üst tarafından yatay olarak sıralanır rakam alınır bu iki rakamdan yatay ve düşey göz ile çekilen birer çizginin kesim noktasına rastlayan rakam, aranan mantistir. Örnek : 2 675 sayısının logaritmasının mantisi 42732 dir. Ohalde, bu sayının logaritması

$$\log 2675 = 3,42732$$

dir.

log 28,87 ise, 2887 nin logaritmasının mantisının aynı olup karakteristik farklıdır. Karakteristik 1 dir. Yani,

$$\log 28,87 = 1,49045$$

dir.

**51. Dört rakamdan fazla rakamlı sayıların logaritmaları.** — Rakamları dörtten fazla olan sayıların logaritmalarını bulmak için ufak bir hesap yapmak gereklidir. Karakteristik 1 dir. Yani,

**Örnekler:** I. —  $\log 2521,7$  yi bulalım. Cetvelde görüleceği üzere :

$$\log 2521 = 3,40157$$

$$\log 2522 = 3,40175$$

dir. Sayılar arasındaki fark 1 olunca logaritmalar arasındaki fark 18 oluyor :

Sayılar farkı	Logaritmalar farkı
1	18
0,7	x

orantısından

$$x = 0,7 \cdot 18 = 12,6$$

bulunur. Bu fark 3,40157 ye eklenerek

$$\log 2521,7 = 3,401696$$

bulunur. Beş ondalıklı logaritma kullandığımız için 6 ncı rakam 5 den küçük ise atarız; 5 veya 5 den büyük ise, logaritmanın 5 inci rakamına 1 ekleriz : Ohalde,

$$\log 2521,7 = 3,40170$$

dir.

II. —  $\log 272,843$  'ü bulalım. Aynı şekilde düşünerek

$$\begin{array}{r} \log 272,8 \quad 43584 \\ \hline 4 \quad \quad \quad 64 \\ 3 \quad \quad \quad 48 \\ \hline \log 272,843 = 2,43591 \end{array}$$

bulunur.

**52. Logaritması verilen sayıyı bulmak.** —  $1^{\circ}$   $\log x = \underline{2,43886}$  olduğuna göre x nedir?

Bu logaritmaya karşı gelen sayı cetvelde bulunduğuundan sayıyı bulmak kolaydır. Logaritmaya karşı gelen sayı 2747 dir. Karakteristik 2 olduğundan bu sayının soluna 2 sıfır koyarak bir virgül ile ayrılır. Ohalde, sayı

$$x = 0,02747$$

dir.

$$2^{\circ} \quad \log x = 2,42051$$

olsun. 42051'i cetvelde bulamıyoruz. Cetvelde buna yakın 42045 ve 42062 var. Birinciye karşı gelen sayı 2633, ikinciye karşı gelen sayı 2634 dir. Ohalde,

Sayılar farkı	Logaritmalar farkı
1	17
x'	6

orantısından

$$x' = \frac{6}{17} = 0,35$$

bulunur. Buradan

$$2633$$

$$035$$

$$\hline 263335$$

olup, karakteristik 2 olduğundan sayı 3 rakamlı olmak ıcap eder. Şuhalde,

$$x = 263,335$$

dir.

**53. Uygulama I.** —

$$x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435}$$

i hesaplayınız.

İki tarafın logaritması alınarak :

$$\log x = \log 7,56 + \log 4667 + \log 567 + \text{colog } 899,1 + \text{colog } 0,00337 + \text{colog } 23435$$

$\log 7,56$	$= 0,87852$
$\log 4667$	$= 3,66904$
$\log 567$	$= 2,75358$
$\text{colog } 899,1$	$= 3,04619$
$\text{colog } 0,00337$	$= 2,47237$
$\text{colog } 23435$	$= 5,63013$
$\log x$	$= 2,44983$

sayıya geçilerek

$$x = 281,73$$

bulunur.

II. —

$$x = \frac{25 \cdot \sqrt{280,15}}{\sqrt[3]{2744,2}}$$

i hesaplayınız.

$$\log x = \log 25 + \frac{1}{2} \log 280,15 + \frac{1}{3} \operatorname{colog} 2744,2$$

olup

$$\log 25 = 1,39794$$

$$\frac{1}{2} \log 280,15 = 1,22370$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{colog} 2744,2 &= 2,85386 \\ \hline \log x &= 1,47550 \\ x &= 29,888 \end{aligned}$$

bulunur.

### ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki sayıların 2 tabanına göre logaritmalarını bulunuz:

$$1^\circ 2 \quad 2^\circ 4 \quad 3^\circ 8 \quad 4^\circ 16 \quad 5^\circ 32 \quad 6^\circ 64 \quad 7^\circ 128 \quad 8^\circ 2^n.$$

2. Aşağıdaki sayıların 5 tabanına göre logaritmalarını bulunuz:

$$1^\circ 5 \quad 2^\circ 25 \quad 3^\circ 125 \quad 4^\circ 5^n \quad 5^\circ 1 \quad 6^\circ \frac{1}{5} \quad 7^\circ \frac{1}{25} \quad 8^\circ \frac{1}{5^n}.$$

3. Aşağıdaki sayıların 10 tabanına göre logaritmalarını bulunuz:

$$1^\circ 1 \quad 2^\circ 10 \quad 3^\circ 100 \quad 4^\circ 1000 \quad 5^\circ 10^n \quad 6^\circ \frac{1}{10} \quad 7^\circ \frac{1}{100}$$

$$8^\circ \frac{1}{1000} \quad 9^\circ \frac{1}{10^n}.$$

4. Aşağıdaki logaritmalarдан  $x$  in değerini bulunuz:

$$1^\circ x = \log_2 16 \quad 2^\circ x = \log_5 125$$

$$4^\circ x = \log_8 64 \quad 5^\circ \log_2 x = 4$$

$$7^\circ \log_5 x = 3$$

$$10^\circ \log_x 27 = 3$$

$$3^\circ x = \log_2 1/4$$

$$6^\circ \log_3 x = 2$$

$$8^\circ \log_4 x = 3$$

$$9^\circ \log_x 1024 = 2$$

$$11^\circ \log_x 125 = 3$$

$$12^\circ \log_x 256 = 4.$$

5. Aşağıdaki ifadelerin logaritmalarını alınız:

$$1^\circ \log abcd$$

$$2^\circ \log (a^2 - b^2) c$$

$$3^\circ \log \left( \frac{abc}{d} \right)^4$$

$$4^\circ \log \sqrt[5]{\frac{a-b}{c}}$$

$$5^\circ \log a^3 \sqrt{a-b}$$

$$6^\circ \log 6ab^4 \sqrt{c}$$

$$7^\circ \log \frac{21(a^2 - b^2)c}{\sqrt[5]{a-b} \cdot d}$$

$$8^\circ \log \sqrt[6]{\frac{ax+b}{ax+c}}$$

$$9^\circ \log \frac{a}{b} \sqrt[7]{\frac{dx^2}{c}}$$

$$10^\circ \log \frac{1}{ab^5 \sqrt{a-x}}$$

$$11^\circ \log \frac{a+b}{a-b} \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$$

$$12^\circ \log \left( \frac{a}{b} \sqrt[5]{\frac{a+b}{a-b}} \right)^{-1/3}$$

6. Logaritma özelliklerinden faydalananak aşağıdaki logaritma toplam ve farklarını çarpım ve bölüm logaritmları haline getiriniz:

$$1^\circ \log a + \log b - \log c$$

$$2^\circ \log a - \log b + \log d$$

$$3^\circ 3 \log a - \frac{1}{5} \log b$$

$$4^\circ 2 \log a - \frac{1}{3} \log b + \frac{1}{2} \log c$$

$$5^\circ 2 \log(a+b) - \frac{1}{2} \log(a-b) + \log c$$

$$6^\circ \frac{2}{3} \log(a+b) - \frac{3}{5} \log(a-b)$$

$$7^\circ \frac{1}{2} \log(a^2 - b^2) - \frac{1}{3} \log(a^2 + b^2).$$

7. Aşağıdaki sayıların logaritmalarını bulunuz:

$$1^\circ 4687,5 \quad 2^\circ 883,7 \quad 3^\circ 123,45 \quad 4^\circ 27,108$$

$$5^\circ 0,05963 \quad 6^\circ 0,0019887 \quad 7^\circ 0,0001528$$

$$8^\circ 25,2083 \quad 9^\circ 0,26708 \quad 10^\circ 0,00145 \quad 11^\circ 0,0054578.$$

8. Aşağıdaki logaritmaları verilen sayıları bulunuz:

$$1^\circ 0,60836 \quad 2^\circ 2,60792 \quad 3^\circ 1,52009 \quad 4^\circ 3,46285 \quad 5^\circ 4,79211$$

$$6^\circ 2,67025 \quad 7^\circ 1,71003 \quad 8^\circ 2,61055 \quad 9^\circ 2,60228 \quad 10^\circ 3,52140$$

$$11^\circ 2,60105 \quad 12^\circ 5,58092 \quad 13^\circ 4,88644 \quad 14^\circ 0,75311 \quad 15^\circ 2,00144.$$

9. Aşağıdaki hesapları yapınız:

$$1^\circ \sqrt[3]{12} \quad 2^\circ \sqrt{0,2} \quad 3^\circ \sqrt[7]{0,00281} \quad 4^\circ \frac{248,9 \cdot 3,7284}{1829,7}$$

$$5^\circ \sqrt[5]{\frac{0,7142}{283}} \quad 6^\circ (1,273)^9 \cdot \sqrt[3]{17} \quad 7^\circ \frac{\pi^2}{\sqrt{5}} \quad 8^\circ \frac{\sqrt{226}}{\sqrt[3]{\pi}}$$

10. Aşağıdaki hesapları yapınız:

$$1^\circ x = \frac{762,3 \times 48,56 \times 74,79}{\sqrt[3]{25,752}}$$

$$2^\circ x = \sqrt[3]{28,85 \cdot \sqrt[5]{121,7}} \quad 3^\circ x = \frac{(2,15)^7}{(1,63)^2} \quad 4^\circ x = \frac{\pi^2}{(0,95)^2} \cdot (1,07)^3$$

$$5^\circ x = 381,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{25 \sqrt{\pi}}}{\sqrt{3}}} \quad 6^\circ x = \frac{865 \cdot \sqrt[4]{22,5}}{432 \cdot \sqrt[3]{3}} \quad 7^\circ x = \frac{\sqrt[7]{362,93} \cdot \sqrt[5]{2777}}{\sqrt[3]{(6,2794)^2}}$$

### İkinci derece denklemleri

## BÖLÜM IV

### DENKLEMLER

#### S 1. İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİ

**54. Bir bilinmeyenli ikinci derece denklemleri.** —  $x$ 'e göre bir bilinmeyenli ikinci derece denklemi diye, genel olarak

$$ax^2 + bx + c = 0$$

şeklinde olan denklemlere denir.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  bu ikinci derece denkleminin katsayıları olup birer sabit sayıdır,  $b$  ve  $c$  pozitif, negatif ve sıfır olabilir;  $a$ , hiç bir zaman sıfır olamaz. Eğer  $a=0$  olursa bu denklem birinci dereceden bir denklem olur.

$b=0$  veya  $c=0$  olabilir.

$b=0$ ,  $c \neq 0$  olduğu zaman denklem:

$$ax^2 + c = 0 \quad (1)$$

$b \neq 0$ ,  $c=0$  olduğu zaman denklem:

$$ax^2 + bx = 0 \quad (2)$$

olur ki, bu çeşit denklemlere ikinci dereceden eksik denklemler,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denklemine de tam denklem denir.

**55. I.  $ax^2 + bx = 0$  denkleminin çözümü.** — Denklemi  $x$  parantezine alınırsa,

$$x(ax + b) = 0$$

olur. Buradan iki kök olarak daima

$$x' = 0 \quad \text{ve} \quad x'' = -\frac{b}{a}$$

elde edilir.

**Örnekler :**

$3x^2 - 12x = 0$  dan  $3x(x-4) = 0$  yazarak, kökler  $x' = 0$ ,  $x'' = 4$ ,

$$4x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(4x+5) = 0 \Rightarrow x' = 0, x'' = -\frac{5}{4}$$

bulunur.

**II.  $ax^2 + c = 0$  denkleminin çözümü.** — Bu denklemi  $a$  parantezine alarak:

$$a\left(x^2 + \frac{c}{a}\right) = 0$$

ve  $a \neq 0$  olduğundan:

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0 \quad (1)$$

çıkar. Buradan

$$x = \pm \sqrt{-\frac{a}{c}}$$

bulunur.

**1inci hal.** —  $a$  ve  $c$  aynı işaretli iseler  $\frac{c}{a}$  pozitif,  $-\frac{c}{a}$  negatif. Negatif bir sayının çift kuvvetten kökü alınamayacağından denklemin gerçek kökü olmayıp sanal iki simetrik kökü vardır.

**2nci hal.** —  $a$  ve  $c$  ters işaretli iseler  $\frac{c}{a}$  negatif,  $-\frac{c}{a}$  pozitif olur. Denklemi

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

şeklinde gerçek iki simetrik kökü vardır.

56. Bir tam denklemin çözümü. —Örnek :

$$3x^2 + 7x - 20 = 0 \quad (1)$$

denklemini çözelim. Denklemin iki tarafı 3 ile bölünderek

$$x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{20}{3} = 0$$

olur.  $x^2 + \frac{7}{3}x$  in hangi ikiterimlinin karesinin ilk iki terimi olduğunu arayalım?  $x^2 + \frac{7}{3}x$  ifadesi  $\left(x + \frac{7}{6}\right)$  nin karesi ilk iki terimidir.

Görektan,

$$\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 = x^2 + \frac{7}{3}x + \frac{49}{36}$$

dan

$$x^2 + \frac{7}{3}x = \left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36}$$

olur. Ohalde, verilen denklem :

$$\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{49}{36} - \frac{20}{3} = 0$$

veya

$$\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{289}{36} = 0$$

veyahut da

$$\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = 0$$

bulunur. Çarpanlara ayrılırsa

$$\left(x + \frac{7}{6} - \frac{17}{6}\right) \left(x + \frac{7}{6} + \frac{17}{6}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{10}{6}\right) \left(x + \frac{24}{6}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{3}\right) (x + 4) = 0$$

olup, denklemin kökleri :

$$x' = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad x'' = -4$$

dür.

*Gerçekleme.* — (1) denkleminde  $f\left(\frac{5}{3}\right)$  ve  $f(-4)$ 'ü hesaplayalım<sup>1)</sup> ve bunların sıfır olduğunu görelim :

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 3 \cdot \frac{25}{9} + 7 \cdot \frac{5}{3} - 20 = \frac{25}{3} + \frac{35}{3} - 20 = \frac{60}{3} - 20 = 0$$

$$f(-4) = 3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 - 20 = 48 - 28 - 20 = 0$$

çıkar.

57.  $ax^2 + bx + c = 0$  genel denklemin çözümü. —

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

denkleminde  $a \neq 0$  olduğundan, denklemi

$$a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

veya

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad (2)$$

<sup>1)</sup> No. 70'e bakınız.

şeklinde yazılım.  $x^2 + \frac{b}{a}x$ 'e birinci terimi  $x$  olan bir ikiterimlinin karesinin ilk iki terimi gözü ile bakalım; bu ikiterimlinin ikinci terimi  $b/2a$  olacaktır. Çünkü birinci terimle ikincinin çarpımının iki katı  $\frac{b}{a}x$  dir.

Buna göre,

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

den

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

bulunur. Bu değer (2) de yerine konursa :

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

veya

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \quad (3)$$

elde edilir.

1inci hal.  $b^2 - 4ac > 0$  ise, (3) denklemi

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

şeklinde yazılıbilir,  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$  pozitif olduğundan

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 = 0$$

olarak yazılabileceği aşikârdır. Birinci taraf iki kare arasındaki fark olup

$$\left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

veya

$$\left( x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0 \quad (4)$$

bulunur. (4) denkleminin iki kökü

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ve} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

veya her iki kök birleştirilerek :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

bulunur.

2nci hal.  $b^2 - 4ac = 0$  ise, (3) denklemi

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \quad \text{veya} \quad \left( x + \frac{b}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} \right) = 0$$

şeklini alır. Birinci tarafın iki çarpanı  $x = -\frac{b}{2a}$  için sıfır olup bu takdirde denklemin bir ikikat kökü vardır veya iki kökü birbirine eşittir denir.

3üncü hal.  $b^2 - 4ac < 0$  ise,  $4ac - b^2$  pozitif olup (3) denkleminin birinci tarafı iki pozitif terimin toplamı olacağından  $x$  in hiç bir gerçek değeri için sıfır olamaz. Şuhalde, bu denklemin gerçek kökleri yoktur.

#### Ihtar I. — İkinci derece denkleminin çarpanlara ayrılması:

$ax^2 + bx + c = 0$  denklemi,

$$a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

ve  $b^2 - 4ac > 0$  olduğu zaman (4)'e göre

$$a \left( x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0$$

veya

$$a \left( x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = 0 \quad (5)$$

şeklinde kolayca yazılıbilir. Diğer taraftan,

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olduğundan, (5) denklemi

$$a(x - x')(x - x'') = 0$$

şeklinde çarpanlara ayrılır.

**II. —** Yukarıda bulduğumuz

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formülü genel olup

1°  $b^2 - 4ac = 0$  halinde

$$x = \frac{-b \pm 0}{2a} \quad \text{veya} \quad x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

2°  $c = 0, b \neq 0$  veya  $ax^2 + bx = 0$ , denklemi için

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} \quad \text{veya} \quad x' = 0, \quad x'' = -\frac{b}{a}$$

3°  $b = 0, c \neq 0$  veya  $ax^2 + c = 0$  denklemi için

$$x = \frac{\pm \sqrt{-4ac}}{2a} \quad \text{veya} \quad x = \pm \sqrt{-\frac{4ac}{4a^2}} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

halleri için de kullanılabilir. Fakat matematikte daima kısa çözüm tercih edileceğinden eksik denklem çözümlerinde, daha evvel söylenen çözüm yollarını kullanmak gereklidir.

**58. Tanım.** —  $\Delta = b^2 - 4ac$  ye  $ax^2 + bx + c = 0$  denkleminin *diskriminanti* denir<sup>1)</sup>.

Yukarıdaki açıklamayı, bir tablo şeklinde özetleyelim :

<sup>1)</sup> Diskriminant kelimesi, Latince *discrimen* kelimesinden gelir, kısımlara ayırmaya demektir.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{denkleminde}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{olmak üzere :}$$

$\Delta > 0$  ise, denklemenin farklı ve gerçek iki kökü vardır. Bunlar da :

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{şeklindedir.}$$

$\Delta = 0$  ise, denklemenin bir ikikat kökü vardır ve  $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$  dir.

$\Delta < 0$  ise, denklemenin gerçek kökləri yoktur.

**İhtar.** — Denklemenin  $a$  ve  $c$  katsayıları ters işaretli ise, daima gerçek ve farklı iki kökü vardır.

Gerçekten,  $ac < 0$  olduğundan  $-4ac > 0$  ve  $b^2 \geq 0$  olur ki,  $b^2 - 4ac$  daima pozitiftir. Bu sebeple denklemenin farklı ve gerçek iki kökü vardır.

**59. Çözüm formülünün sadeleştirilmesi.** — Bir ikinci derece denkleminde  $b$  çift ise, çözüm formülü daha sade bir şekele konabilir. Gerçekten,  $b = 2b'$  olsun :

$$b^2 - 4ac = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$$

veya

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = 2\sqrt{b'^2 - ac}$$

olacağından denklemenin kökləri :

$$x = \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a}$$

veya

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

bulunup  $\Delta' = b'^2 - ac$ ının işaretini  $\Delta$ nin işaretinin aynı olur. Çünkü  $\Delta = 4\Delta'$  dir. Şuhalde,  $\Delta'$  ye denklemenin yeni diskriminanti diyebiliriz.

60. Uygulama I. —  $x^2 - 7x + 12 = 0$  denkleminin çözümü.

$a = 1, b = -7, c = 12$  olup  $\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1$  bulunur. Denklemin kökleri ise :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğundan

$$x' = \frac{7 + \sqrt{1}}{2} = 4 \quad \text{ve} \quad x'' = \frac{7 - \sqrt{1}}{2} = 3$$

dür.

II. —  $x^2 - 10x + 21 = 0$  denkleminin çözümü.

$a = 1, b' = -5, c = 21$  ve  $\Delta' = b'^2 - ac = 25 - 21 = 4$  olup denklemin kökleri,

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$$

olduğundan

$$x = 5 \pm 2 \quad \text{olup} \quad x' = 7, \quad x'' = 3$$

bulunur.

III. —  $9x^2 - 30x + 25 = 0$  denkleminin çözümü.

$$\Delta' = b'^2 - ac = 15^2 - 9 \cdot 25 = 225 - 225 = 0$$

olup buradan

$$x' = x'' = \frac{-b'}{a} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

bulunur.

61. Köklerin karşılaştırılması. — İkinci derece denkleminin kökleri :

$$x' = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ve} \quad x'' = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

olduğundan

$$x' - x'' = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

bulunur. Şuhalde, köklerin  $x' - x''$  farkı  $a$  nin işaretine bağlıdır.

1° Eğer  $a > 0$  ise,

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

büyük kök,

2° Eğer  $a < 0$  ise,

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

büyük köktür.

### ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemleri formül kullanmadan çözünüz :

- |  |  |                              |
|--|--|------------------------------|
| 1° $2x^2 + 5x = 0$                                     | 2° $21x^2 - 46x = 0$                                     | 3° $x^2 - 25 + 3(x + 5) = 0$ |
| 4° $(x + 5)^2 - 4x - 20 = 0$                           | 5° $4x^2 - 81 = 0$                                       | 6° $27x^2 - 144 = 0$         |
| 7° $(x - 9)^2 - 49 = 0$                                | 8° $(3x - 7)^2 - 4(x + 1)^2 = 0$                         |                              |
| 9° $\frac{3x - 2}{2x + 5} - \frac{2x + 5}{3x - 2} = 0$ | 10° $\frac{9x - 27}{2x - 7} - \frac{8x - 28}{x - 3} = 0$ |                              |

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz:

$$1^{\circ} \quad x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$3^{\circ} \quad x^2 - 11x + 28 = 0$$

$$5^{\circ} \quad 5x^2 - 31x + 30 = 0$$

$$7^{\circ} \quad 6x^2 + 71x + 175 = 0$$

$$9^{\circ} \quad 15x^2 - 225x + 210 = 0$$

$$11^{\circ} \quad (1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 1 + 3\sqrt{2} = 0$$

$$12^{\circ} \quad (2 - \sqrt{3})x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 5 + 3\sqrt{3} = 0$$

$$13^{\circ} \quad \frac{2x+1}{x-2} + \frac{2x+18}{x+3} = 2$$

$$14^{\circ} \quad \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{5x-11}{x-1}$$

$$15^{\circ} \quad \frac{x+2}{x+4} + \frac{x+4}{x+3} = \frac{11}{6}$$

$$16^{\circ} \quad \frac{2x+3}{x-3} - \frac{3(x-3)}{x+3} = 2$$

$$17^{\circ} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}.$$

3. Aşağıdaki harfli denklemleri çözünüz:

$$1^{\circ} \quad x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$2^{\circ} \quad x^2 - (m+2)x + 2m = 0$$

$$3^{\circ} \quad x^2 - (a+b+c)x + a(b+c) = 0$$

$$4^{\circ} \quad x^2 - 2ax + a^2 - 9b^2 = 0$$

$$6^{\circ} \quad 3x^2 + 2(2a-b)x + a^2 - b^2 = 0$$

$$7^{\circ} \quad x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m - 8 = 0$$

$$8^{\circ} \quad (m+1)x^2 - (5m+6)x + 3(2m+3) = 0$$

$$9^{\circ} \quad (a^2 - b^2)x^2 - 4a^2bx + 4a^2b^2 = 0.$$

### PROBLEMLER

1. 60 sayısını öyle iki kısma ayıriz ki, çarpımları 864 olsun.
2. İki sayının toplamı 60 ve kareleri toplamı 1872 dir. Bu sayıları bulunuz.
3. İki sayının farkı 6 ve çarpımları 720 dir. Sayıları bulunuz.
4. Üç sayıdan ikinci birincinin üçe ikisi, üçüncü birincinin yarısı ve her üçünün kareleri toplamı 549 dur. Bu üç sayıyı bulunuz.
5. İki sayının farkı 2 ve kareleri toplamı 244 dir. Sayıları bulunuz.
6. 10 sayısını öyle iki kısma ayıriz ki çarpımları, kareleri toplamına eklenince 76 olsun.
7. Bir sayı diğer bir sayının 16 katıdır ve sayıların çarpımı 144 dir. Sayıları bulunuz.
8. Toplamları 34 ve çarpımları 273 olan iki sayı bulunuz.
9. Toplamları 25 ve kareleri toplamı 373 olan iki sayı bulunuz.
10. Farkları 7 ve kareleri farkı 175 olan iki sayı bulunuz.
11. Çarpımları 124 ve bölümleri  $7 \frac{3}{4}$  olan iki sayı bulunuz.
12. Oranları  $\frac{3}{4}$  ve kareleri farkı 1183 olan iki sayı bulunuz.
13. Çarpımları 1088 olan ardışık iki çift sayı bulunuz.
14. İki ardışık tek sayının toplamına bunların kareleri toplamı ve küpleri farkı eklenirse 140 oluyor. Bu sayıları bulunuz.
15. 20 sayısını o suretle iki kısma ayıriz ki, küpleri toplamı, kareleri toplamı ve bunların farkı toplanırsa 2764 olsun.
16. Birkaç kişi bir lokantada yemek yediler. Gidecekleri zaman 8750 kuruş borçlarını olduğunu anladılar. Bunlardan ikisinin parası olmadığı için bu borç diğerleri arasında bölünerek verildi. Bu iki kişi para vermedikleri için diğerleri verecekleri paradan 500 kuruş fazla para ödediler. Bu adamlar kaç kişi idiler?
17. Bir hayırsever, mahallesindeki fakirlere 8640 liralık bir yardım yapmak istiyor. Bunlardan 6 kişi yardım kabul etmeyerek kendi hisselerini de daha fakir olan diğerlerine vermesini komusundan rica ediyorlar. Geriye kalanlar alacakları paradan 20 şer lira fazla almış olduklarına göre, yardım görenler kaç kişidir?
18. 36800 liralık bir miras, mirasçılar arasında bölünecektir. Eğer, mirasçılar 2 kişi daha az olsalardı her biri alacağından 920 lira fazla miras alacaktı. Mirasçılar kaç kişidir?

19. İki musluk beraberce açıldığında, bir havuzu 4 saatte dolduruyor. Musluklardan biri yalnız olarak diğer musluktan 6 saat evvel havuzu dolduracağı bilindiğine göre, her musluk bu havuzu kaç saatte doldurur?

20. Ahmet ve Mehmet adındaki iki adam bir işi beraber  $14\frac{2}{5}$  günde ve Ahmet adındaki adam yalnız başına olarak Mehmet'in yalnız başına yapacağı gün sayısından 12 gün az bir zamanda işi bitiriyor. Ahmet'in yalnız bu işi kaç günde yapacağını bulunuz.

21. Ahmet ve Mehmet adındaki iki haberci 90 mil uzaklığındaki bir yere gitmek üzere aynı zamanda yola çıktılar. Ahmet, Mehmet'den saatte 1 mil fazla yol alarak gitceği yere Mehmet'den bir saat evvel vardı. Her biri saatte kaç mil mesafe gitmiş oldular?

22. Aralarında 320 mil uzaklık bulunan Ahmet ve Mehmet adındaki iki adam birbiri ile birleşmek üzere aynı zamanda yola çıktılar. Ahmet her gün Mehmet'den 8 mil fazla yol yürüyor. Birleşikleri güne kadar geçen gün sayısı, Mehmet'in bir günde yürüdüğü yolum yarısı kadardır. Birleşikleri zaman her biri kaç mil yol yürüdüler?

## § 2. İKİNCİ DERECE DENKLEMİNİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKI BAĞINTILAR

62. Teorem. —  $ax^2 + bx + c = 0$  denkleminin köklerinin toplamı  $-b/a$ , çarpımı  $c/a$  dir.

No. 57, 1inci halde görüldüğü üzere bir ikinci derece denkleminin  $x'$ ,  $x''$  kökleri:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ve} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dir. Kökleri toplayalım,

$$\begin{aligned} x' + x'' &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned} \quad (1)$$

bulunur.

Kökleri çarpalım,

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} \quad (2)$$

elde edilir.

(1) ve (2) ye, ikinci derece denkleminin kökleri ile katsayıları arasındaki bağıntılar denir.

63. Köklerin akıldan bulunması. — Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılardan faydalananarak bazı ikinci derece denklemlerinin köklerini formül kullanmadan bulabiliyoruz. Örnek :

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

denkleminin kökleri  $x'$ ,  $x''$  ise :

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = 5$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = 6$$

bağıntılarından

$$x' = 2, \quad x'' = 3$$

olacağı kolaylıkla görülür.

Bu usul bilhassa kökleri tamsayı ve  $a = 1$  olan denklemlerde kolaylıkla uygulanır.

64. Köklerin işaretü. — Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılarından faydalananarak, denklemi çözmeden, köklerin işaretini belirtebiliriz.

Bunun için önce  $\frac{c}{a}$  ya bakılır.

1inci hal.  $\frac{c}{a} < 0$  ise,  $a$  ve  $c$  ters işaretli olup farklı ve gerçek iki kök vardır. Kökler çarpımı nekatif olduğu için kökler ters işaretlidir.

2 nci hal.  $c = 0$  ise, bir kök sıfırdır. Diğer kök  $-b/a$  dir. İşareti derhal görülür.

3 üncü hal.  $\frac{c}{a} > 0$  ise, denklemin gerçek köklerinin varlığı için bir şey söylemenemez. Eğer  $\Delta \geq 0$  ise, gerçek kökleri vardır. Köklerin çarpımı pozitif olduğundan kökler aynı işaretlidir. Köklerin ortak işaret  $-b/a$  nin işaretine bağlıdır. Eğer,  $-b/a > 0$  ise, iki kök pozitif,  $-b/a < 0$  ise, iki kök negatiftir.

Özet olarak :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ denkleminde :}$$

- 1°  $\frac{c}{a} < 0$  ise .....  $x' < 0 < x''$
- 2°  $c = 0$  » .....  $x' = 0, x'' = -\frac{b}{a}$
- 3°  $\frac{c}{a} > 0$  ve  $\Delta \geq 0$  ise  $\left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{a} > 0, 0 < x' \leq x'' \\ -\frac{b}{a} < 0, x' \leq x'' < 0 \end{array} \right. \text{ dir.}$

**65. Kökleri bilinen ikinci derece denklemini bulmak.** — Köklerle katsayılar arasındaki bağınlardan faydalananarak, kökleri bilinen ikinci derece denklemini kurabiliriz. Örnek :

$$x' = 5, x'' = -3$$

olan ikinci derece denklemini kurmak için köklerin toplam ve çarpımını buluruz :

$$x' + x'' = 5 - 3 = 2 = -\frac{b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = 5 \cdot (-3) = -15 = \frac{c}{a}$$

Diger taraftan, kurulacak ikinci derece denklemi :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

veya

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

şeklinde olacağından  $\frac{b}{a}$  ve  $\frac{c}{a}$  yerine yukarıdaki değerler konulursa:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

denklemi elde edilir.

**66. Toplam ve çarpımları verilen sayıları bulmak.** —  $\alpha$  ve  $\beta$  sayılarının toplamı  $S$  ve çarpımı  $P$  olsun. Kökleri  $\alpha$  ve  $\beta$  olan ikinci derece denklemini kuralım :

$$x' + x'' = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = S$$

$$x' \cdot x'' = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = P$$

olduğundan istenilen denklem :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri, toplamları  $S$  ve çarpımları  $P$  olan  $\alpha$  ve  $\beta$  sayılarını verir. Örnek :

$$\alpha + \beta = 7$$

$$\alpha \cdot \beta = 6$$

olan  $\alpha$  ve  $\beta$  sayılarını bulmak için, kökleri  $\alpha$  ve  $\beta$  olan ikinci derece denklemini kurarız :

$$x' + x'' = \alpha + \beta = 7 = -\frac{b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \alpha \cdot \beta = 6 = \frac{c}{a}$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0.$$

Bu denklemin kökleri  $x' = 6, x'' = 1$  dir. Ohalbde,  $\alpha = 6, \beta = 1$  veya  $\alpha = 1, \beta = 6$  bulunur.

### § 3. KÖKLERİN SİMETRİK FONKSİYONLARI

**67. Tanım.** —  $ax^2 + bx + c = 0$  denkleminin  $x'$  ve  $x''$  köklerinin simetrik fonksiyonları diye  $x'$  ve  $x''$  nün yerlerinin değiştirilmesiyle değişmeyen ifadelere denir.

Örnekler:  $x'^2 + x''^2$ ,  $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$ ,  $\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2}$  gibi...

$x'$  ve  $x''$  ye göre simetrik olan bu ifadelerin her biri  $x' + x'' = -\frac{b}{a}$

ve  $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$  cinsinden aşağıda gösterilen şekilde hesaplanabilirler:

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x' + x''}{x' \cdot x''} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{x'^2 + x''^2}{x'^2 \cdot x''^2} = \frac{\frac{b^2 - 2ac}{a^2}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

**68. Problem.**  $x^2 + (m-2)x + m+5=0$  denkleminde  $m$  parametresi ne olmalıdır ki

$$x'^2 + x''^2 = 10 \quad (1)$$

olsun?

İstenen bağıntı köklerin bir simetrik fonksiyonu olup

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 10$$

veya

$$(x' + x'')^2 - 2x'x'' - 10 = 0$$

dan

$$(m-2)^2 - 2(m+5) - 10 = 0$$

bulunur. Parantezler açılıp kısaltmalar yapılarak:

$$m^2 - 6m - 16 = 0$$

denklemi bulunur. Bu denklemin kökleri  $m' = -2$ ,  $m'' = 8$  olup:  $m = -2$  için denklem

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

dır. Kökler 1 ve 3 olup verilen bağıntıyı sağlar.

$m = 8$  için denklem

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

olup gerçek kökleri yoktur. Fakat, bu denklemin gerçek olmayan kökleri (1) bağıntısını sağlar.

**69. Problem.** — Aşağıdaki sistemi çözünüz:

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x + y = 7.$$

Birinci denklem:

$$(x+y)^2 - 2xy = 25$$

şekline konulup  $x+y$  nin değeri yerine konulursa:

$$49 - 2xy = 25$$

$$xy = 12$$

bulunur.

Toplamları 7 ve çarpımları 12 olan  $x$ ,  $y$  sayıları

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

denkleminin kökleridir. Bu denklemin çözümünden

$$x = 3, \quad y = 4$$

veya

$$x = 4, \quad y = 3$$

bulunur.

## ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemelerin köklerini, toplam ve çarpımlarına bakarak bulunuz:

$$1^{\circ} \quad x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$2^{\circ} \quad x^2 + x - 42 = 0$$

$$3^{\circ} \quad x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$4^{\circ} \quad x^2 - x - 20 = 0$$

$$5^{\circ} \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$6^{\circ} \quad x^2 + 10x + 21 = 0$$

$$7^{\circ} \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$8^{\circ} \quad x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$9^{\circ} \quad x^2 + 12x + 35 = 0$$

$$10^{\circ} \quad x^2 - 7x - 8 = 0.$$

2. Aşağıdaki denklemeleri gözmeden köklerin işaretlerini belirtiniz:

$$1^{\circ} \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$2^{\circ} \quad x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$3^{\circ} \quad x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$4^{\circ} \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$5^{\circ} \quad x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$6^{\circ} \quad x^2 + 11x + 28 = 0$$

$$7^{\circ} \quad x^2 + 13x + 42 = 0$$

$$8^{\circ} \quad x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$9^{\circ} \quad x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$10^{\circ} \quad x^2 + 5x - 14 = 0.$$

3. Kökleri aşağıdaki sayılar olan ikinci derece denklemelerini kurunuz:

$$1^{\circ} \quad +2 \text{ ve } +5, \quad 2^{\circ} \quad +7 \text{ ve } -3, \quad 3^{\circ} \quad -5 \text{ ve } +4,$$

$$4^{\circ} \quad -8 \text{ ve } -7, \quad 5^{\circ} \quad +6 \text{ ve } -1, \quad 6^{\circ} \quad +1 \text{ ve } -1.$$

4. Kökleri aşağıdaki sayılar olan ikinci derece denklemelerini kurunuz:

$$1^{\circ} \quad m \text{ ve } n, \quad 2^{\circ} \quad 2/3 \text{ ve } 3/4, \quad 3^{\circ} \quad 1/3 \text{ ve } -5, \quad 4^{\circ} \quad a+b \text{ ve } a-b,$$

$$5^{\circ} \quad -4 \text{ ve } -2/9, \quad 6^{\circ} \quad -4 \text{ ve } -11/2,$$

$$7^{\circ} \quad 3 + \sqrt{2} \text{ ve } 3 - \sqrt{2}, \quad 8^{\circ} \quad \sqrt{2} + 1 \text{ ve } \sqrt{2} - 1,$$

$$9^{\circ} \quad 4 + \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ve } 4 - \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad 10^{\circ} \quad \frac{1}{a+b} \text{ ve } \frac{1}{a-b}.$$

## Alıştırmalar

5. Aşağıdaki toplamları ve çarpımları verilen sayıları bulunuz:

	$S$ 9	$P$ 20		$S$ 8	$P$ -33
1°	-2	-35	2°	-11	18
3°	$\frac{10}{3}$	1	4°	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{4}{5}$
5°	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	6°	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{4}$
7°	$\frac{6}{5}$	-1	8°	$2m+3$	$2m+2$
9°	$m-2$	$m-3$	10°	$2 + \frac{4}{m^2-1}$	1
11°	$\frac{2}{1-m^2}$	$\frac{1}{1-m^2}$	12°		

6. Aşağıdaki denklemelerde  $m$  ne olmalıdır ki, kökler arasında karşılıklı yazılı bağıntılar bulunsun:

$$1^{\circ} \quad 2x^2 + (2m+1)x - 2 = 0$$

$$x' + x'' = -1$$

$$2^{\circ} \quad x^2 - 2(m-3)x - 6m = 0$$

$$x' x'' = 2(x' + x'')$$

$$3^{\circ} \quad mx^2 - 3(m+1)x + m + 3 = 3$$

$$x' + x'' = 6 \text{ veya } x' x'' = 6$$

$$4^{\circ} \quad (2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$$

$$x' + x'' = 1 \text{ veya } x' x'' = -1.$$

7.  $m$  ne olmalıdır ki, aşağıdaki denklemelerin köklerinden biri karşılıklı yazılı olan sayı olsun? Diğer kökü bulunuz:

$$1^{\circ} \quad (m^2 - 1)x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$$

$$x' = 2$$

$$2^{\circ} \quad (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$$

$$x' = 2$$

$$3^{\circ} \quad x^2 - 2(m+2)x + 2m^2 - 17 = 0$$

$$x' = 11$$

$$4^{\circ} \quad mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$$

$$x' = 3.$$

8. Aşağıdaki denklemelerde  $m$  ne olmalıdır ki, kökler arasında karşılıklı yazılı bağıntılar bulunsun:

$$1^{\circ} \quad (11 - m^2)x^2 - 2(m+1)x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 6$$

$$2^{\circ} \quad x^2 + 2mx + m^2 - 4m - 5 = 0$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{1}{4}$$

$$3^{\circ} \quad x^2 - 2mx + m^2 - m + 8 = 0$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{5}$$

$$4^{\circ} \quad (m-3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

$$x'^2 + x''^2 = 52$$

$$5^{\circ} \quad x^2 - 5x + m - 1 = 0$$

$$x'^2 + x''^2 = 13$$

$$6^{\circ} \quad x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$$

$$x'^2 + x''^2 = 25$$

$$7^{\circ} \quad mx^2 - 2(m+4)x + m + 15 = 0$$

$$x'^2 + x''^2 = 68$$

$$8^{\circ} \quad mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$$

$$4(x' + x'') = 7x'x''.$$

9.  $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$  denklemi gözönüne alınıyor:

1° Bu denklemin discriminantının  $\Delta' = (m-1)(m-2)$  olduğunu gösteriniz.

2°  $m$  yi o suretle bulunuz ki, kökler arasında  $x'^2 + x''^2 = x'x'' + 4$  bağıntısı bulunsun.

10. Köklerin simetrik fonksiyonlarının hesabından faydalananak aşağıdaki sistemleri çözünüz:

$$1^{\circ} \quad x^2 + y^2 = 13$$

$$2^{\circ} \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$x + y = 5$$

$$x \cdot y = 2$$

$$3^{\circ} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

$$4^{\circ} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7$$

$$x + y = \frac{3}{2}$$

$$x \cdot y = \frac{1}{12}$$

$$5^{\circ} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{13}{36}$$

$$6^{\circ} \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$$

$$x + y = -5$$

$$x \cdot y = -1.$$

11. Aşağıdaki denklemlerde  $m$  ne olmalıdır ki, iki kök eşit olsun:

$$1^{\circ} \quad (m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$$

$$2^{\circ} \quad x^2 + 2(m-1)x + 3m - 5 = 0$$

$$3^{\circ} \quad (2m-3)x^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$$

$$4^{\circ} \quad (m+7)x^2 - 2(m-9)x - 7m + 15 = 0$$

$$5^{\circ} \quad mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$$

$$6^{\circ} \quad (m+1)x^2 - (m+3)x - m + 3 = 0$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{2}{5}$$

$$x'^2 + x''^2 = 52$$

$$x'^2 + x''^2 = 13$$

$$x'^2 + x''^2 = 25$$

$$x'^2 + x''^2 = 68$$

$$4(x' + x'') = 7x'x''.$$

## BÖLÜM V

### İKİNCİ DERECE ÜÇTERİMLİSİ - EŞİTSİZLİKLER

70. **Tanımlar.** —  $x$ 'e göre ikinci dereceden  $f(x) = ax^2 + bx + c$  şeklinde bulunan bütün  $f(x)$  çokterimlilerine ikinci derece üçterimlisi denir.

$b$  ve  $c$  katsayıları sıfır olabilir, fakat  $a$  hiç bir zaman sıfır olamaz. Çünkü bu takdirde  $f(x)$  birinci dereceden bir ifade olur. Örnekler:

$$f(x) = 2x^2 - 7x + 5, \quad f(x) = 4x^2 - 3, \quad f(x) = 5x^2 + 7x$$

birer ikinci derece üçterimlidirler.

Bir  $f(x)$  üçterimlisinde  $x$  yerine  $x = \alpha$  konursa üçterimlinin aldığı değer  $f(\alpha)$  ile gösterilir. Yani,

$$f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$$

dir. Bu  $f(\alpha)$ , pozitif, negatif ve sıfır değerlerini alabilir.

Bir ikinci derece üçterimlisini sıfır yapan  $x$  in değerlerine bu ikinci derece üçterimlisinin kökleri denir. Şuhalde, bu değer

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin kökleridir.

Aynı şekilde  $\Delta = b^2 - 4ac$  ye, denklemlerde olduğu gibi, ikinci derece üçterimlisinin discriminantı denir.

#### 71. İkinci derece üçterimlisinin işaretü —

**Örnekler:** I.  $f(x) = x^2 - 2x + 6$  ikinci derece üçterimlisinin işaretini inceleyelim :

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 + 6$$

şeklinde yazılabileceği için üçterimli :

$$f(x) = (x-1)^2 + 5$$

olur.  $f(x)$ ,  $(x-1)^2$  ile 5 in toplamına eşit olduğundan ve  $(x-1)^2$  pozitif veya sıfır, 5 ise daima pozitif olduğundan bunların toplamı daima pozitiftir. Şuhalde,  $x$  ne olursa olsun  $f(x)$  ikinci derece üçterimli daima pozitiftir.

**II.**  $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$  un işaretini inceleyelim. Bu üçterimli

$$f(x) = -4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)$$

şeklinde yazılıp, buradan da

$$f(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

şekline girer. Bu üçterimli  $x = 3/2$  için sıfır olup  $x$  in bundan başka değerleri için negatiftir. Çünkü  $(x - 3/2)^2$  pozitif, bunun  $-4$  ile çarpımı negatiftir. Şuhalde, verilen ikinci derece üçterimli,  $x$  in  $3/2$  den başka bütün değerleri için negatiftir.

**III.**  $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$  ikinci derece üçterimlisinin işaretini inceleyelim :

$$f(x) = 2(x^2 - 2x - 15) = 2(x+3)(x-5)$$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. 2 daima pozitif olduğundan üçterimlinin işaretü  $(x+3)(x-5)$  in işaretine göre değişir. Bu çarpımların her birinin işaretini, sonra da çarpımın işaretini aşağıdaki tablo ile inceleyelim :

$x$	$-\infty$	$-3$	$5$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-5$	-	-	0	+
$(x+3)(x-5)$	+	0	-	0

Bu tabloda görüldüğü üzere  $f(x) = 2(x+3)(x-5)$  üçterimli  $x = -3$  ve  $x = 5$  için sıfır ( $-3, +5$ ) aralığının dışında 2 nin işaretinin aynını, aralığın içinde 2 nin ters işaretini alıyor.

**72. Teorem.** 1°  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ikinci derece üçterimlinin diskriminantı negatif ise,  $x$  ne olursa olsun, üçterimlinin işaretü  $x^2$  nin katsayısı olan  $a$  nin işaretinin aynıdır.

2° Diskriminant sıfır ise,  $x$  in  $x = -b/2a$  dan başka bütün değerleri için üçterimli  $a$  nin işaretinin aynını alır.

3° Diskriminant pozitif ise, ikinci derece üçterimli, köklerin dışında  $a$  nin işaretinin aynını, köklerin arasında  $a$  nin ters işaretini alır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$  ikinci derece üçterimli

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

olup en nihayet :

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Buna üçterimlinin kanonik şeklär denir.

1inci hal :  $\Delta < 0$  ise,  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  olduğundan  $4ac - b^2$  pozitiftir. Büyük parantez içindeki ifade

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \text{ ile } \frac{4ac - b^2}{4a^2}$$

nin toplamından ibaret olup birincisi pozitif veya sıfır, ikincisi ise pozitif olduğu için pozitiftir. Şuhalde,  $x$  ne olursa olsun büyük parantez içi pozitif olup  $f(x)$  in işaretü  $a$  nin işaretinin aynıdır.

2nci hal :  $\Delta = 0$  ise,  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  olduğundan  $4ac - b^2 = 0$  olup

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

denkleminin  $x' = -b/2a$  şeklinde bir ikikat kökü vardır. Ohalde,

$$f(x) = a(x - x')^2$$

şeklinde yazılabilir.  $x$  in  $x'$  den başka bütün değerleri için  $(x - x')^2$  pozitif olup  $f(x)$ ,  $a$  nin işaretinin aynını alır.

3 üncü hal:  $\Delta > 0$  ise,  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  olduğundan üçterimli

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)^2 \right]$$

veya

$$f(x) = \left( x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

yazılır. Üçterimlinin iki kökü :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ve} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

olduğundan

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

yazılır (No. 57, İhtar I).  $x' < x''$  farz edersek :

$x$	$-\infty$	$x'$	$x''$	$+\infty$
$x - x'$	-	0	+	+
$x - x''$	-	-	0	+
$(x - x')(x - x'')$	+	0	-	0
$f(x)$	$a$ ile aynı işarette	$0$	$a$ ile ters işarette	$0$

Tabloda görüldüğü gibi  $f(x)$ ,  $x$  in  $x < x'$  ve  $x > x''$  değerleri için  $a$  ile aynı işarette ve  $x$  in  $x' < x < x''$  değerleri için  $a$  ile ters işarettedir.

### İKİNCİ DERECE EŞİTSİZLİĞİ

73. Tanım. —  $ax^2 + bx + c > 0$  veya  $ax^2 + bx + c < 0$  şeklinde bulunan eşitsizliklere ikinci derece eşitsizliği denir.

Bir ikinci derece eşitsizliğini çözmek demek, yukarıda görülen ikinci derece üçterimlisinin işaretini inceleyerek eşitsizliği sağlayan aralığı bulmak demektir.

74. Uygulama I.  $x^2 - 8x + 7 < 0$  eşitsizliğini çözünüz.

$x^2 - 8x + 7$  üçterimli  $x = 1$  ve  $x = 7$  için sıfır,  $x < 1$  ve  $x > 7$  için pozitif;  $1 < x < 7$  için de negatiftir. Ohalde,  $x$  in  $1 < x < 7$  değerleri eşitsizliği sağlar.

II.  $(x + 2)(2x - 3) > 0$  eşitsizliğini çözünüz.

$(x + 2)(2x - 3)$  üçterimli  $x = -2$  ve  $x = 3/2$  için sıfırdır.  $x^2$  nin katsayısi  $+2$  olduğundan üçterimli  $x < 2$  ve  $x > 3/2$  için pozitiftir. Ohalde,  $(-2; 3/2)$  aralığının dışı eşitsizliği sağlar.

III.  $-x^2 + 6x - 9 < 0$  eşitsizliğini çözünüz.

$f(x) = -x^2 + 6x - 9$  üçterimlisinin  $x = 3$ , bir ikikat köküdür.  $x \neq 3$  değerleri için eşitsizlik sağlanır.

IV.  $x^2 - 2x + 3 < 0$  eşitsizliğini çözünüz.

$x^2 - 2x + 3$  üçterimlisinin diskriminanti negatiftir.  $x$  in bütün değerleri için üçterimli pozitif olacağından  $x$  in hiç bir değeri eşitsizliği sağlamaz. Yani bu eşitsizlik mümkün değildir.

75.  $ax^2 + bx + c > 0$  eşitsizliğinin incelenmesi. —

I inci hal:  $a > 0$  ise,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  üçterimlisinde :

$\Delta < 0$  ise,  $f(x)$ ,  $x$  in bütün değerleri için pozitif olacağından  $x$  ne olursa olsun eşitsizlik sağlanır.

$\Delta = 0$  ise,  $f(x)$ ,  $x$  in  $x = -b/2a$  dan başka bütün değerleri için pozitif olduğundan eşitsizlik  $x$  in  $x = -b/2a$  dan başka bütün değerleri için sağlanır.

$\Delta > 0$  ise, üçterimli kökler dışında pozitif olduğundan eşitsizlik  $x < x'$  ve  $x > x''$  için sağlanır.

2 nci hal:  $a < 0$  ise,  $f(x) = ax^2 + bx + c$  üçterimlisi:

$\Delta \leq 0$  için  $f(x)$ ,  $a$ nın işaretinin aynı olduğundan eşitsizlik mümkün değildir.

$\Delta > 0$  için  $f(x)$ , kökler arasında  $a$  ile ters işarette olduğundan eşitsizlik  $x' < x < x''$  için mümkündür.

Bu sonucu bir tablo şeklinde özetleyelim:

	Eşitsizlik: $ax^2 + bx + c > 0$
$a > 0$	$\Delta < 0$ ise, eşitsizlik daima mümkündür. $\Delta = 0$ ise, $x \neq -b/2a$ için mümkündür. $\Delta > 0$ ise, $x < x' < x''$ için mümkündür. $x' < x'' < x$
$a < 0$	$\Delta \leq 0$ ise, eşitsizlik asla mümkün değildir. $\Delta > 0$ ise, $x' < x < x''$ için mümkündür.

$ax^2 + bx + c < 0$  eşitsizliği de aynı şekilde incelenir. Yukarıdaki tabloyu ters çevirmek gereklidir.

### 76. İkinci derece eşitsizliğine götürülebilen eşitsizlikler. —

#### Örnekler. —

I.  $\frac{x-1}{x-5} > 0$  eşitsizliğini çözünüz.

$x-5 \neq 0$  olmak üzere eşitsizliğin iki tarafını  $(x-5)^2$  ile çarpalım:

$$(x-1)(x-5) > 0$$

olur.  $(x-1)(x-5)$  üçterimlisi  $x=1$  ve  $x=5$  için sıfır ve  $x^2$ nin katsayısi  $+1$  olduğundan üçterimli kökler dışında pozitif olup  $x < 1$ ,  $x > 5$  için eşitsizlik mümkündür.

II.  $\frac{1}{x^2-5x+4} < \frac{1}{x^2-7x+10}$  eşitsizliğini çözünüz.

Eşitsizlik,

$$\frac{1}{x^2-5x+4} - \frac{1}{x^2-7x+10} < 0$$

veya

$$\frac{(x^2-7x+10)-(x^2-5x+4)}{(x^2-5x+4)(x^2-7x+10)} < 0$$

veyahut, pay kısaltılarak :

$$\frac{-2x+6}{(x^2-5x+4)(x^2-7x+10)} < 0$$

şeklinde yazılabilir. Birinci tarafın işaretini inceleyelim.  $-2x+6$ nın kökü 3;  $x^2-5x+4$ ün kökleri 1 ve 4;  $x^2-7x+10$ un kökleri 2 ve 5 olduğundan bunların her birinin işaretini tablo ile inceleyelim :

$x$	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
$-2x+6$	+	+	+ 0 -	-	-	-	
$x^2-5x+4$	+	0 -	-	- 0 +	+		
$x^2-7x+10$	+	+ 0 -	-	- 0 +			
Birinci taraf	+	-	+ 0 -	+	-		

olup, eşitsizlik  $1 < x < 2$ ,  $3 < x < 4$  veya  $x < 5$  için sağlanır.

### AYNI ZAMANDA GERÇEKLENEN EŞİTSİZLİKLER

77. Uygulama.  $5x+3 > 0$ ,  $x^2-3x-10 < 0$  ve  $x^2-4x+3 > 0$  eşitsizliklerini gözönüne alalım. Birinci eşitsizliğin çözümü

$$x > -\frac{3}{5} \quad (1)$$

verir. İkinci eşitsizliğin çözümü :

$$-2 < x < 5$$

(2)

verir. Üçüncü eşitsizliğin çözümü

$$x < 1 \quad \text{veya} \quad x > 3$$

(3)

verir.

Bu üç eşitsizliği birden gerçekleyen  $x$  in değerleri

$$-\frac{3}{5} < x < 1 \quad \text{ve} \quad 3 < x < 5$$

aralıkları olduğu görülür.

### ALİŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki ikinci derece üçterimlilerinin işaretlerini inceleyiniz:

$$1^{\circ} \quad x^2 - 3x + 2$$

$$2^{\circ} \quad -x^2 + 2x - 1$$

$$3^{\circ} \quad x^2 - x + 1$$

$$4^{\circ} \quad x^2 - 5x + 6$$

$$5^{\circ} \quad -x^2 + 6x - 9$$

$$6^{\circ} \quad x^2 + 8x + 15$$

$$7^{\circ} \quad 7x^2 - 12x + 5$$

$$8^{\circ} \quad 3x^2 + 8x - 11$$

$$9^{\circ} \quad 5x^2 - 7x - 12$$

$$10^{\circ} \quad (5x + 7)(x - 4)^2$$

$$11^{\circ} \quad (2x - 3)(7 - 2x)$$

$$12^{\circ} \quad (3x + 1)(x + 5)$$

$$13^{\circ} \quad (x + 1)^2 - 9x^2$$

$$14^{\circ} \quad (4x + 5)^2 - 49$$

$$15^{\circ} \quad x^2 - (3x + 1)^2$$

2. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz:

$$1^{\circ} \quad x(3 - x) > 0$$

$$2^{\circ} \quad (2x - 3)(5 - 3x) < 0$$

$$3^{\circ} \quad (x^2 - 9)(x^2 + 5x - 6) > 0$$

$$4^{\circ} \quad (2x - 1)^2 - (2x - 1)(x + 3) > 0$$

$$5^{\circ} \quad (2x - 1)^2 - (x + 3)^2 < 0$$

$$6^{\circ} \quad 4(x - 1)^2 < 9(x + 1)^2$$

$$7^{\circ} \quad x^2 < 4x$$

$$8^{\circ} \quad x > \frac{1}{x}$$

$$9^{\circ} \quad \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$$

$$10^{\circ} \quad \frac{x}{x-3} > 1$$

$$11^{\circ} \quad \frac{x+1}{x-2} < \frac{x+2}{x-1}$$

$$12^{\circ} \quad \frac{2x-1}{x+1} < 2$$

$$13^{\circ} \quad \frac{x}{3x-1} < \frac{1}{3}$$

$$14^{\circ} \quad \frac{3-x}{x+1} < \frac{3}{2}$$

$$15^{\circ} \quad \frac{6x+2}{3x+9} - \frac{1-x}{2x+1} < 0$$

$$16^{\circ} \quad \frac{x+1}{x-3} - \frac{1}{3} > \frac{4}{x-3}$$

$$17^{\circ} \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 1} > 0$$

$$18^{\circ} \quad \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 1} > 0$$

$$19^{\circ} \quad \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 1} > 0$$

$$20^{\circ} \quad \frac{x^2 - 5x + 4}{9 - x^2} < 0$$

$$21^{\circ} \quad \frac{1 - x^2}{x + 3} < 0$$

$$22^{\circ} \quad \frac{4}{x^2 + 4x} < -1.$$

3. Aşağıda aynı zamanda gerçekleşen eşitsizlikleri çözünüz:

$$1^{\circ} \quad \begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$$

$$2^{\circ} \quad \begin{cases} x^2 - 14x + 33 > 0 \\ x^2 - 18x + 65 < 0 \end{cases}$$

$$3^{\circ} \quad \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ 7x^2 - 31x - 20 < 0 \end{cases}$$

$$4^{\circ} \quad \begin{cases} (x^2 - 11x)^2 < 9(x + 5)^2 \\ (x^2 - 12x + 24)^2 > 4x^2 \end{cases}$$

$$5^{\circ} \quad \begin{cases} x^2 - 6x - 16 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 < 0 \end{cases}$$

$$6^{\circ} \quad \begin{cases} (5x - 19)^2 < (x - 23)^2 \\ (4x - 11)^2 - (2x - 7)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{9} > 0$$

$$\frac{4}{2x-5} < \frac{5}{x-1}$$

## BÖLÜM VI

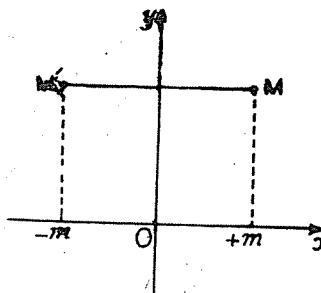
### FONKSİYONLAR

#### § 1. $y = ax^2$ FONSİYONUNUN DEĞİŞİMİ VE GRAFIĞİ

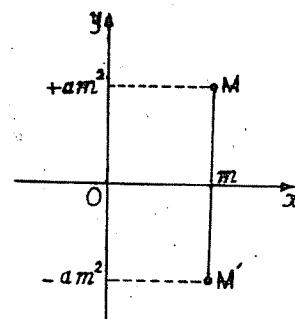
78. No. 3 de  $a=1$  olduğuna göre,  $y=x^2$  fonksiyonunun değişimini pratik olarak incelemiş ve grafiğini çizmiştık. Şimdi daha geniş bir inceleme yapacağız :

$y = ax^2$  fonksiyonu. —  $y = ax^2$  fonksiyonu  $x$  in bütün değerleri için belirlidir, yani  $x$  in her değeri için  $y$  hesaplanabilir. Bu fonksiyon  $x=0$  için sıfırdır.

Bu fonksiyon çift değerli bir fonksiyondur, yani  $x$  e verilecek



Şek. 3



Şek. 4

$(+m)$  ve  $(-m)$  gibi iki değere  $y$  nin bir değeri karşı gelir (Şek. 3). Gerçekten,  $x$  yerine  $\pm m$  değerleri konursa,

$$y = am^2$$

olur. Bu sebeple apsisleri  $(-m)$  ve  $(+m)$  olan  $M'$  ve  $M$  noktaları  $Oy$  eksenine göre simetiktir.

Şuhalde,  $Oy$  eksenin bu fonksiyonun grafiğinin bir simetri eksenidir. Ohalde, bu fonksiyonun değişimini incelemek için fonksiyonun  $x > 0$  halindeki değişimini incelemek yeter.

#### 79. $a$ nin simetrik değeri. —

$$y = ax^2 \quad \text{ve} \quad y = -ax^2$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım.  $x = m$  için her iki fonksiyonun aldığı değerler :

$$y = am^2 \quad \text{ve} \quad y = -am^2$$

dir (Şek. 4).  $x$  in herhangibir değeri için bu iki fonksiyonun aldığı değerler simetrik olduklarından bu iki fonksiyon da  $Ox$  eksenine göre simetrik iki fonksiyondur. Ohalde,  $y = ax^2$  fonksiyonunun değişimini incelemek  $a$  pozitif veya negatif olmak üzere fonksiyonun  $x > 0$  halindeki değişimini incelemek yeter.

80. Değişim yönü. —  $a > 0$  farz ederek  $x$  e pozitif  $x_1$  ve  $x_2$  değerlerini verelim.  $x$  in artma miktarı :

$$x_2 - x_1$$

buna karşılık  $y$  nin artma miktarı da

$$y_2 - y_1 = a(x_2^2 - x_1^2) = a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)$$

dir.  $a$  ve  $(x_2 + x_1)$  hipotezden dolayı pozitif olduklarından  $y_2 - y_1$  ile  $x_2 - x_1$  aynı işaretlidir, yani değişken ve fonksiyon aynı yönde değişiyor. Ohalde, fonksiyon  $x > 0$  için çoğalan bir fonksiyondur.

81.  $x$  in büyük değerleri. —  $x$  e büyük değerler verildiği zaman  $x^2$  daha büyük olacak ve  $a > 0$  olduğundan  $ax^2$ , yani  $y$  de büyük değerler olacaktır.

82. Değişim tablosu. — Yukarıdaki geniş açıklamadan anlaşıla-  
cığı üzere,  $y = ax^2$  fonksiyonunun değişim tablosu :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = ax^2$	$\begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$	0	$\begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$
	$\nearrow$	0	$\nearrow$

şeklinde olur. Grafik çizimine yardım olmak için bu tabloya apsisleri 1, 2, 3, ... gibi keyfi değerler olan noktaları eklemelidir.

**83. Fonksiyonun gösterdiği grafik.** — 1°  $a > 0$ . Aynı koordinat ekseni üzerinde

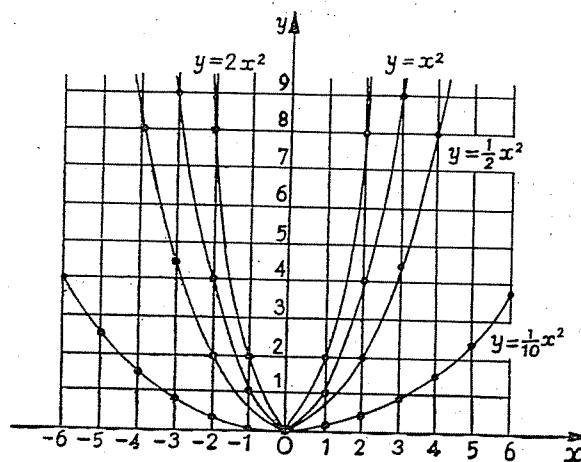
$$y = x^2$$

$$y = 2x^2,$$

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

$$y = \frac{1}{10}x^2$$

fonksiyonlarının gösterdikleri grafikleri çizelim. Sek. 5 de görüldüğü üzere  $a$  büyükçe grafiğin kolları  $Oy$  eksenine doğru daralmaktadır. Tersine olarak  $a$  küçüdüçce  $Oy$  eksenine göre kollar açılmaktadır. Bütün eğriler koordinat merkezinden geçmekte ve fonksiyon burada en küçük (sıfır) değerini almaktadır. Bu en küçük değere *fonksiyonun minimum değeri* denir. Tablo ve şekilde görüldüğü üzere fonksiyon, koordinat merkezine kadar azalmakta, buradan sonra çoğalmaktadır.



Sek. 5

1°  $a < 0$ . Şimdi

$$y = -x^2,$$

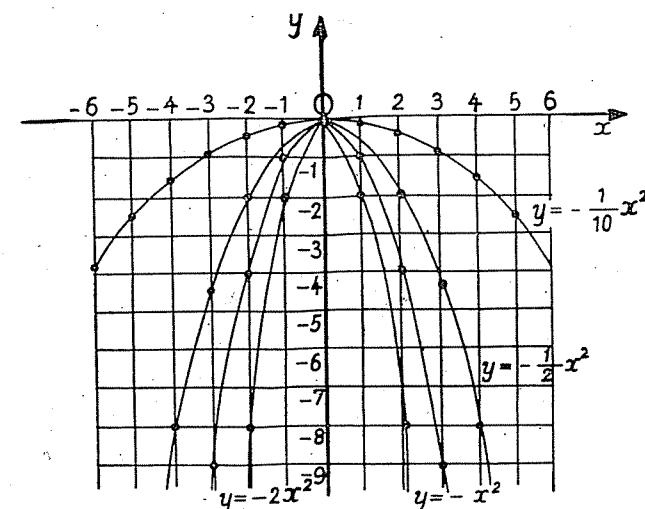
$$y = -x^2,$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$y = -\frac{1}{10}x^2$$

fonksiyonlarının grafiklerini çizelim (Sek. 6).  $y = ax^2$  ve  $y = -ax^2$  fonksiyonlarının grafikleri  $Ox$  eksenine göre simetrik olduklarından

yukarıdaki düşüncelerle derhal grafik çizilir. Bu fonksiyonların hepsi  $O$  ya kadar çoğalır ve  $O$  dan sonra azalır. Fonksiyon  $x=0$  için  $y=0$  en büyük değerini alır ki, bu değere *fonksiyonun maksimum değeri* denir.



Sek. 6

**84. Bu eğrinin özellikleri.** —  $Oy$  ekseni üzerinde ordinatı  $\frac{1}{4a}$

olan bir  $F$  noktası alalım, denklemi  $y = -\frac{1}{4a}$  olan  $Ox$  eksenine paralel doğru  $D$  olsun (Sek. 7).

$y = ax^2$  eğrisi üzerinde apsisi  $m$  ve ordinatı

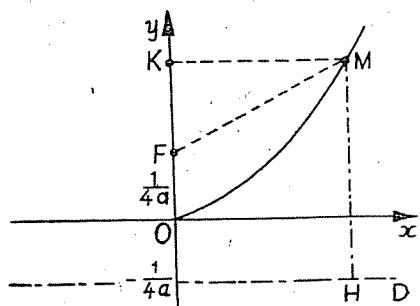
$$y = am^2$$

olan bir nokta  $M$  olsun.

$M$  noktasının  $F$  noktasına ve  $D$  doğrusuna olan  $MF$ ,  $MH$  uzaklıklarını hesaplayalım.  $MFK$  dik üçgeninden

$$\overline{MF}^2 = \left( am^2 - \frac{1}{4a} \right)^2 + m^2$$

$$\overline{MF}^2 = a^2m^4 - \frac{m^2}{2} + \frac{1}{16a^2} + m^2$$



Sek. 7

$$\overline{MF}^2 = a^2 m^4 + \frac{m^2}{2} + \frac{1}{16a^2} = \left(am^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$HM = am^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right) = am^2 + \frac{1}{4a}$$

dir. Şuhalde,  $MF = HM$  olur. Bu eğri, sabit bir nokta ve sabit bir doğruya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeridir. Bu eğriye *parabol* denir.

### § 2. $y = ax^2 + bx + c$

#### FONKSİYONUNUN DEĞİŞİMİ VE GRAFİĞİ

85.  $y = ax^2 + bx + c$  üçterimlisinin değişimi. — Bu fonksiyon  $x$  in bütün değerleri için belirlidir. Bu fonksiyonun değişimini incelemek için No. 57 de gördüğünüz şeke koyalım:

$$y = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

olur. Biz önce  $a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  nin değişimini inceleyelim.  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  sabit olup  $x$  in değişmesi ile değişmez.

1°  $X = x + \frac{b}{2a}$  koyalım.  $x, -\infty$  dan  $+\infty$  kadar büyürse  $x + \frac{b}{2a}$  da  $-\infty$  dan  $+\infty$  a kadar büyür.  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)$ ,  $x$  in  $x < -\frac{b}{2a}$  değeri için negatif  $x = -\frac{b}{2a}$  değeri için sıfır,  $x > -\frac{b}{2a}$  değeri için de pozitiftir.

Bu sebeple,  $y = x^2$  fonksiyonunda görüldüğü gibi  $X, -\infty$  dan  $0$  a kadar çoğalınca  $X^2 = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$ ,  $+\infty$  dan  $0$  a kadar azalır ve  $x, -\infty$

dan  $-\frac{b}{2a}$  ya kadar çoğalınca  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$ ,  $+\infty$  dan  $0$  a kadar azalır ve  $x, -\frac{b}{2a}$  dan  $+\infty$  a kadar çoğalınca  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  de  $0$  dan  $+\infty$  a kadar çoğalır.

Bu sonucu bir tablo ile özetleyelim:

$x$	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$X = x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$X^2 = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2°  $aX^2$  yi gözönüne alalım.

$$y_1 = aX^2 = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

Eğer  $a > 0$  ise  $y_1$ ,  $X^2$  ile aynı yönde değişir.  $a < 0$  ise  $y_1$ ,  $X^2$  ile ters yönde değişir.

$y = ax^2$  nin değişmesinden faydalananarak aşağıdaki değişim tablosunu yapalım:

$x$	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$	$a > 0$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$
	$a < 0$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$

3°  $y_1$  e  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  sabit miktarı ilâve edilirse, değişim yönü değişmeyeceğinden aşağıdaki değişim tablosu elde edilir:

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$a > 0$			
$y_1 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	$\searrow$	$0$
$y = ax^2 + bx + c$	.	.	.
$= y_1 + \frac{4ac - b^2}{4a}$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a}$
$a < 0$			
$y_1 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$	$\nearrow$	$0$
$y = ax^2 + bx + c$	.	.	.
$= y_1 + \frac{4ac - b^2}{4a}$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4ac - b^2}{4a} \searrow -\infty$

Bu tablodan anlaşılmıyor ki:

I. Eğer  $a > 0$ ,  $x, -\infty$  dan  $-\frac{b}{2a}$  ya kadar çoğalınca

$$y = ax^2 + bx + c$$

üçterimlisi,  $+\infty$  dan  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  ya kadar azalır;  $x, -\frac{b}{2a}$  dan  $+\infty$  'a kadar çoğalınca, üçterimli de  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  dan  $+\infty$  'a kadar çoğalır.

Fonksiyon  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$  aralığında azalan bir fonksiyon,  $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$  aralığında çoğalan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonda  $x = -\frac{b}{2a}$  için  $y$  nin alacağı değere *fonksiyonun minimum değeri*

denir ki,  $y$  nin alabileceği en küçük değerdir. Ohalbde, fonksiyonun minimum değeri:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ dır.}$$

II. Eğer  $a < 0$  ise,  $x, -\infty$  dan  $-\frac{b}{2a}$  ya kadar çoğalınca

$$y = ax^2 + bx + c$$

üçterimlisi,  $-\infty$  dan  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  ya kadar çoğalır,  $x, -\frac{b}{2a}$  dan  $+\infty$  'a kadar çoğalınca, üçterimli  $\frac{4ac - b^2}{4a}$  dan  $-\infty$  'a kadar azalır. Ohalbde, fonksiyon  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$  aralığında çoğalan,  $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$  aralığında azalan bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun,  $x$  in  $x = -\frac{b}{2a}$  için aldığı değere *fonksiyonun maksimum değeri* denir ki fonksiyonun alabileceği en büyük değerdir ve bu da:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ dır.}$$

86. Uygulama I. — Üçterimli  $y = x^2 - 4x + 1$  olsun. Bunu  $y = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$

şeklinde yazalım. Bu fonksiyonda  $x, -\infty$  dan 2 ye kadar çoğalan değerler alınca fonksiyon,  $+\infty$  dan  $-3$  kadar azalan değerler alır.  $x, 2$  den  $+\infty$  'a kadar çoğalan değerler alınca fonksiyon da  $-3$  den  $+\infty$  'a kadar çoğalan değerler alır.

$$\text{II. } y = -x^2 + 3x + 5 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{29}{4}$$

üçterimlisinde  $x, -\infty$  dan  $3/2$  ye kadar çoğalan değerler alınca fonksiyon da  $-\infty$  dan  $29/4$  'e kadar çoğalan değerler alır.  $x, 3/2$  den  $+\infty$  'a kadar çoğalan değerler alınca fonksiyon da  $29/4$  den  $-\infty$  'a kadar azalan değerler alır.

Bu açıklamalardan sonra şu sonuçlara varılır:

1° Bir üçterimlide  $a > 0$  ise,  $x = -\frac{b}{2a}$  için bu üçterimli, minimum değeri alır.

2° Bir üçterimlide  $a < 0$  ise,  $x = -\frac{b}{2a}$  için bu üçterimli, maksimum değeri alır.

3° Üçterimlinin maksimum veya minimum değeri  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$  dir.

87. Eğrinin eksenleri kestiği noktalar. —  $y = ax^2 + bx + c$  fonksiyonunda  $x' e 0$  değeri verilirse  $y = c$  bulunur.  $A(0, c)$  noktası, eğrinin  $y$ -eksenini kestiği noktadır. Bu eğri  $x$ -eksenini keserse kesim noktalarının ordinatları 0 olduğundan, bu noktaların apsisleri

$$ax^2 + bx + c = 0$$

denkleminin kökleridir.

**Örnekler:** I.  $y = x^2 + 2x - 3$  fonksiyonunda  $x = 0$  için  $y = -3$  dür.  $x^2 + 2x - 3 = 0$  denkleminin kökleri  $x = 1$ ,  $x = -3$  olduğundan  $x$  in bu değerleri için  $y = 0$  dır. Ohalde, eğrinin  $y$ -eksenini kestiği nokta  $(0, -3)$ ,  $x$ -eksenini kestiği noktalar  $(1, 0)$ ,  $(-3, 0)$  dır.

II.  $y = x^2 - 4x + 4$  fonksiyonunun grafiğinin eksenleri kestiği noktalar  $(x = 0, y = 4)$  ve  $(x = 2, y = 0)$  dır.  $x^2 - 4x + 4 = 0$  denkleminde  $x_1 = x_2 = 2$  olduğundan, eğri  $x$ -eksenine tegettir.

III.  $y = x^2 + x + 1$  fonksiyonunun grafiği  $y$ -eksenini  $(0, 1)$  noktasında keser.  $x^2 + x + 1 = 0$  denkleminin gerçek kökleri olmadığından  $y \neq 0$  dır. Yani grafik,  $x$ -eksenini kesmez.

### ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların değişimlerini inceleyiniz ve grafiklerini çiziniz:

$$1^\circ y = 3x^2$$

$$2^\circ y = \frac{x^2}{4}$$

$$3^\circ y = -\frac{x^2}{4}$$

$$4^\circ y = \frac{3x^2}{4} - 3$$

$$5^\circ y = x^2 - 8x + 12$$

$$6^\circ y = 4x^2 - 5x + 4$$

$$7^\circ y = 9x^2 - 6x + 1$$

$$8^\circ y = -3x^2 + 7x - 1$$

$$9^\circ y = -2x^2 + 4x - 5$$

$$10^\circ y = 2x^2 - 3x + 1$$

$$11^\circ y = -x^2 + 2x - 1$$

$$12^\circ y = x^2 - 1$$

$$13^\circ y = x^2 - 3x + 2$$

$$14^\circ y = x^2 + 3x + 2$$

$$15^\circ y = x^2 - 5x + 6$$

2. Aşağıdaki paraboller ile karşılarında yazılı doğruları çiziniz ve kesim noktalarını bulunuz:

$$1^\circ y = x^2 + x + 1$$

$$y = \frac{7}{2}$$

$$2^\circ y = x^2 - 2x - 3 \quad x = 2$$

$$4^\circ y = x^2 + 4x - 5 \quad x = 1$$

$$3^\circ y = x^2 - 3$$

$$y = 1$$

$$6^\circ y = 0,5x^2 \quad y = -0,5x + 3$$

$$5^\circ y = -3x^2 \quad y = -9x + 6$$

$$7^\circ y = -x^2 - 4x + 12$$

$$y = 5x + 12$$

$$8^\circ y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{5}{2}, \quad y = 5x + 1$$

3.  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  fonksiyonunda  $a, b, c$  katsayılarını o suretle belirtiniz ki

$$f(0) = 1 \quad ; \quad f(-1) = 3 \quad ; \quad f(1) = 4$$

şartları mevcut olsun. Fonksiyonun değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

4.  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  üçterimlinin katsayılarını o suretle belirtiniz ki,  $x = 8$  için üçterimli sıfır ve  $x = 6$  için  $y = -12$  ye eşit bir minimum olsun. Katsayıları belirttikten sonra, üçterimlinin değişimini inceleyiniz ve grafiğini çiziniz.

5.  $m$  yi o suretle belirtiniz ki,

$$y = mx^2 - (m^2 - 6)x + m^2 - 1$$

üçterimli  $x = \frac{5}{2}$  için bir minimum değer alsin.

6.  $y = ax^2$  parabolünün  $A(-3; 2,25)$  noktasından geçmesi için  $a$  ne olmalıdır? Bulunan parabol ile  $x + 2y = 4$  doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.

7.  $m$  ve  $n$  yi o suretle belirtiniz ki  $y = x^2 + mx + n$  parabolü  $x$ -eksenini  $-2$  ve  $+5$  de kessin?

8.  $a, b, c$  yi o suretle belirtiniz ki  $y = ax^2 + bx + c$  parabolü  $y$ -eksenini  $-8$  de,  $x$ -eksenini  $+4$  ve  $-2$  de kessin?

9.  $y = x^2 - x - 2$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Eğri üzerinde apsisleri  $x = 1$  ve  $x = 3$  olan A, B noktalarından geçen AB doğrusunun O<sub>x</sub>, O<sub>y</sub> eksenlerini P ve Q noktalarında kestiğine göre, OPQ üçgeninin alanını bulunuz.

10.  $y = ax^2 + bx + c$  fonksiyonunda  $a, b, c$  yi o suretle belirtiniz ki:

1°  $x = 0$  ve  $x = 1$  için  $y = -1$  ve  $x = -1$  için  $y = 1$  olsun.

2°  $a, b, c$  için bulunan değerleri yerine koyarak fonksiyonun grafiğini çiziniz.

### § 3. $y = \frac{a}{x}$ FONKSİYONUNU DEĞİŞİMİ VE GRAFIĞI

88.  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonu  $x$  in 0 dan farklı bütün değerleri için belirlidir. Yani  $x$  in 0 dan farklı değerleri için  $y$  fonksiyonu daima hesaplanabilir.

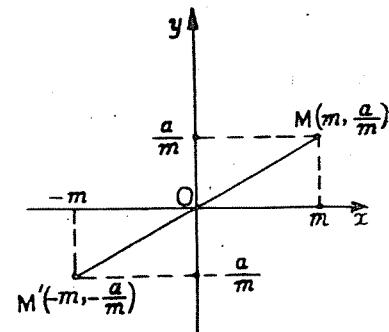
$y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunda  $x$ 'e verilen  $(+m)$  ve  $(-m)$  gibi simetrik değerlere karşılık  $y$  de  $\left(+\frac{a}{m}\right)$  ve  $\left(-\frac{a}{m}\right)$  gibi simetrik değerler alır (Şek. 8).

Ohalde, bu fonksiyon başlangıç noktasına göre simetriktir. Buna göre, bu fonksiyonun değişimini  $x$  in pozitif değerler için incelemek yeter.

89.  $a$  nin simetrik değerleri. —

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{ve} \quad y = -\frac{a}{x}$$

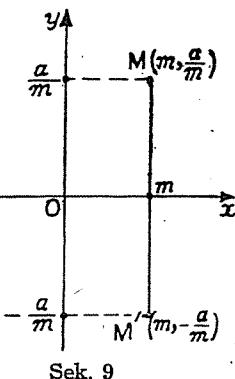
fonksiyonlarını gözönüne alalım.  $x$  herhangibir  $m$  değerine karşılık yukarıdaki iki fonksiyon



Şek. 8

$$y = \frac{a}{m} \text{ ve } y = -\frac{a}{m}$$

simetrik değerlerini alır (Şek. 9).



Şek. 9

Ohalde,  $y = \frac{a}{x}$  ve  $y = -\frac{a}{x}$  fonksiyonları  $x$ -eksenine göre simetrikdir.

Yukarıdaki iki özelliğe göre, genel olarak  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunun değişimini incelemek için fonksiyonun  $a > 0$  ve  $x > 0$  halindeki değişimini incelemek yeter.

**90. Değişim yönü.** —  $a > 0$  farz ederek  $x$ 'e pozitif  $x_1$  ve  $x_2$  değerlerini verelim.  $x$  in:

$$x_2 - x_1$$

artma miktarına karşılık  $y$  nin artma miktarı:

$$y_2 - y_1 = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2} = -\frac{a(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

olur.  $a$  ve  $x_1, x_2$  pozitif farz edildiğinden  $y_2 - y_1$  farkı  $x_2 - x_1$  ile ters işaretlidir. Yani  $x$  in büyüyen değerlerine karşılık fonksiyonun aldığı değerler küçülür veya  $x$  in küçülen değerlerine karşılık fonksiyonun aldığı değerler büyür. Ohalde,  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonu  $a > 0$  ve  $x > 0$  için eksilen bir fonksiyondur.

**91.  $y$  nin sıfırın yakın değerleri.** —  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunda  $a$  sabit ve pozitif bir sayı olmak üzere  $x$ 'e gittikçe küçülen pozitif değerler verelim ve  $y$  nin bunlara karşılık aldığı değerleri bulalım:

$$x = 1 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{1} = a$$

$$x = 0,1 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{0,1} = 10a$$

$$x = 0,01 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{0,01} = 100a$$

$$x = 0,001 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{0,001} = 1000a$$

$$x = 0,0001 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{0,0001} = 10000a$$

Görülüyorki,  $x$  pozitif olarak sıfıra yaklaşan değerler aldıkça  $y$  de pozitif ve gittikçe büyüyen değerler alarak  $+\infty$ 'a uzanır.

$x$ 'e negatif ve gittikçe sıfıra yaklaşan değerler verelim:

$$x = -1 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-1} = -a$$

$$x = -0,1 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-0,1} = -10a$$

$$x = -0,01 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-0,01} = -100a$$

$$x = -0,001 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-0,001} = -1000a$$

$$x = -0,0001 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-0,0001} = -10000a$$

Görülüyorki,  $x$  negatif değerler alarak sıfıra yaklaşırsa  $y$  de negatif değerler alarak  $-\infty$ 'a uzanır.

$x = 0$  için  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonu kesiklidir denir.

$a < 0$  olması halinde:  $x$  pozitif olarak sıfıra yaklaşan değerler aldıkça,  $y$  negatif değerler alarak  $-\infty$ 'a uzanır.

$x$  negatif olarak sıfıra yaklaşan değerler aldıkça  $y$  pozitif ve büyüyen değerler alarak  $+\infty$ 'a uzanır.

Bu halde yine  $x = 0$  için  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonu kesiklidir denir.

92.  $x$  in büyük değerleri. —  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunda  $a$  sabit ve pozitif bir sayı olmak üzere  $x$  in gittikçe büyüyen değerlerine karşılık  $y$  fonksiyonu:

$$x = 10 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{10}$$

$$x = 100 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{100}$$

$$x = 1000 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{1000}$$

$$x = 10000 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{10000}$$

veya

$$x = -10 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-10}$$

$$x = -100 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-100}$$

$$x = -1000 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-1000}$$

$$x = -10000 \quad \text{için} \quad y = \frac{a}{-10000}$$

değerlerini alır.

Görlüyor ki,  $x$  mutlak değerce  $\infty$ 'a doğru büyüyen değerler aldıkça,  $y$  de mutlak değerce sıfıra yaklaşmaktadır.

$a < 0$  olması halinde:  $x, +\infty$ 'a uzandıkça,  $y$  negatif taraftan sıfıra yaklaşır.

$x, -\infty$ 'a uzandıkça,  $y$  pozitif taraftan sıfıra yaklaşır.

93. Değişim tablosu. — Yukarıdaki açıklamalara göre  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunun değişim tablosu:

$x$	$-\infty$	$-s$	$0 + s$	$+ \infty$
$\frac{a}{x}$	$-s'$	$\searrow$	$-\infty$	$+ \infty$
$a > 0$	$+ s'$	$\nearrow$	$+\infty$	$-s'$

şeklinde olur.

Burada  $s$  ve  $s'$  istenildiği kadar küçük ve pozitif sayıları göstermektedir.

Grafik çizimine yardımcı olmak üzere bazı özel noktalar kullanılır. Bunun için de  $x$  e verilen bazı keyfi değerlere karşılık  $y$  nin aldığı değerleri bulup tabloya eklemelidir.

Ayrıca,  $x = m$  için  $y = a/m$  ve  $x = a/m$  için  $y = m$  olduğunu  $(m, a/m), (a/m, m)$  noktaları  $y = \pm x$  doğrularına göre simetriktir.  $y = \pm x$  ile  $y = a/x$  kesim noktaları, grafiğin özel iki noktasıdır.

94. Fonksiyonun gösterdiği grafik. —  $a > 0$  olarak aynı koordinat eksenleri üzerinde:

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{4}{x}; \quad y = \frac{1}{2x}$$

fonksiyonlarının gösterdikleri eğrileri çizelim (Şek. 10).

Şekilde görülür ki,  $x$  büyüyen mutlak değerler aldıkça, eğri  $x$ -eksenine yaklaşmaktadır.  $x$  e kitap sayfasının hudufları dışında büyüyen değerler verdigimizi düşünürsek, eğri kolu da  $x$ -eksenine yaklaşmaya devam edecektir.

$x$  in sıfıra yaklaşan değerleri için her iki eğri kolu  $y$ -eksenine yaklaşmaktadır.

Bu durumda  $x$  ve  $y$  eksenlerine, eğrinin asymptotları denir.

$a < 0$  olarak aynı koordinat eksenleri üzerinde

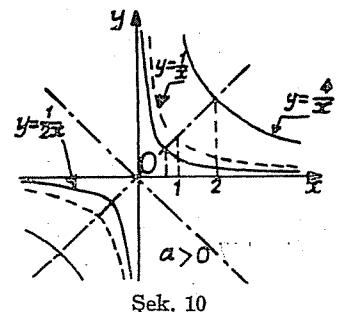
$$y = -\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{4}{x}, \quad y = -\frac{1}{2x}$$

fonksiyonlarının eğrileri çizilirse, yukarıdaki şekillerin  $x$ -eksenine göre simetrleri elde edilir.

### ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların değişimlerini inceleyiniz ve grafiklerini çiziniz:

- |                        |                        |                        |                        |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1° $y = \frac{3}{x}$   | 2° $y = \frac{-5}{x}$  | 3° $y = \frac{1}{2x}$  | 4° $y = \frac{3}{4x}$  |
| 5° $y = -\frac{1}{x}$  | 6° $y = -\frac{3}{x}$  | 7° $y = -\frac{10}{x}$ | 8° $y = -\frac{5}{x}$  |
| 9° $y = \frac{0,1}{x}$ | 10° $y = \frac{48}{x}$ | 11° $y = \frac{5}{2x}$ | 12° $y = \frac{7}{2x}$ |



2. Aşağıdaki eğriler ile karşısında yazılı doğruların kesim noktalarını bulunuz:

$$1^{\circ} \quad y = \frac{2}{x} \quad y = -2x + 5$$

$$2^{\circ} \quad y = \frac{6}{x} \quad y = x - 5$$

$$3^{\circ} \quad y = \frac{20}{x} \quad y = x + 8$$

$$4^{\circ} \quad y = \frac{16}{x} \quad y = x + 8.$$

$$3. \quad y = -\frac{1}{7}x + 2 \text{ doğrusunun } y = \frac{7}{x} \text{ eğrisine teget olduğunu gösteriniz.}$$

Değme noktasının koordinatlarını bulunuz.

(Cevap:  $x = 7$ ,  $y = 1$ ).

4.  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunda  $a$  yi o suretle belirtiniz ki, eğri,  $A(\frac{1}{2}, -6)$  noktasından geçsin. Eğriyi çiziniz.

5.  $y = \frac{1,8}{x}$  ve  $y = -\frac{1,8}{x}$  eğrileri ne özellik gösterir? Aynı koordinat sisteminde çiziniz.

6. İki sayının çarpımı 80 dir. Sayılardan biri 0 ile 80 arasında değiştiğine göre, diğerinin değişimini grafikle gösteriniz.

7.  $y = \frac{18}{x}$  eğrisi ile  $y = x + 3$  doğrusunu aynı koordinat sisteminde çiziniz.

Bunlar yardımcı olacak:

$$-x + y = 3$$

$$x \cdot y = 18$$

sisteminin köklerini bulunuz. Bu kökleri ayrıca hesaplayınız.

8.  $y = \frac{4}{x}$  ile  $y = h$  doğrusu veriliyor:

Doğrunun  $y = \frac{4}{x}$  'i kestiği noktası A,  $y$ -eksenini kestiği noktası C, AC nin orta noktası I ve I dan  $y$ -eksenine çizilen paralelin eğriyi kestiği noktası B,  $x$ -eksenini kestiği noktası E olsun. BI = IE olduğunu gösteriniz.

9.  $y = \frac{3}{x}$  eğrisi ile  $y = 2x + 1$  doğrusu veriliyor:

- 1° Eğri ile doğrunun A ve B kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz.
- 2°  $y = 2x + 1$  in  $Ox$  ve  $Oy$  eksenlerini kestiği noktalar C ve D ile gösterilirse,  $AC = BD$  olduğunu bulunuz.

#### § 4. KOORDİNAT EKSENLERİİN KENDİLERİNDE PARALEL OLARAK KAYDIRILMALARI

95. Bir M noktasının  $Ox$  ve  $Oy$  eksenine göre koordinatları  $x = OP$ ,  $y = OQ$  olsun (Şek. 11).  $Ox$  ve  $Oy$  eksenlerine göre koordinatları:

$$OP_0 = x_0 ; \quad OQ_0 = y_0$$

olan  $O'$  noktasından bu eksenlere  $O'X$  ve  $O'Y$  paralellerini çizelim. M noktasının eksenlere göre koordinatları:

$X = O'P'$ ;  $Y = O'Q'$  dır. Şekilde görüldüğüne göre:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu formüller  $xOy$  eksenlerine göre koordinatları bilinen bir noktadan  $XO'Y$  eksenlerine göre koordinatlarını bulmaya yarar.

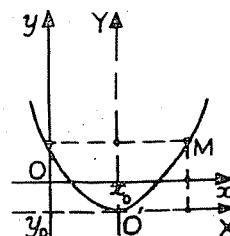
96. Uygulama I.  $y = ax^2 + bx + c$  fonksiyonunu

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

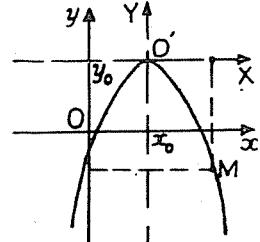
şekline koyalım. Koordinatları,

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

olan  $O'$  noktasından  $Ox$  ve  $Oy$  eksenlerine  $O'X$ ,  $O'Y$  paralellerini çizelim (Şek. 12-13).  $y = ax^2 + bx + c$  eğrisi üzerinde alınan  $M(x, y)$  noktasının yeni eksenlere göre koordinatları  $X$ ,  $Y$  ile gösterilirse:



Şek. 12



Şek. 13

$$x = X - \frac{b}{2a}$$

$$y = Y + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

dür. M noktasının  $x$  ve  $y$  koordinatları:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{veya} \quad y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

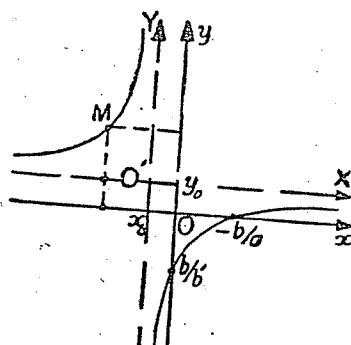
denklemi sağlayacağından :

$$Y + \frac{4ac - b^2}{4a} = a \left( X - \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\text{veya} \quad Y = aX^2$$

bulunur. Bunun bir parabol gösterdiğini biliyoruz.

Ohalde,  $y = ax^2 + bx + c$  nin grafiği, tepe noktası  $O' \left( -\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$  noktasına kaymış bir parboldür.  $x = -\frac{b}{2a}$  doğrusu bu parabolün simetri ekseniidir (No. 85).



Sek. 14

II. —

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

fonksiyonunu

$$y = \frac{ax + b}{a' \left( x + \frac{b'}{a'} \right)}$$

şekline koyalım. Koordinatları :

$$x_0 = -\frac{b'}{a'}; \quad y_0 = \frac{a}{a'}$$

olan  $O'$  noktasından  $Ox$  ve  $Oy$  eksenlerine  $O'X$ ,  $O'Y$  paralellerini çizelim (Sek. 14).

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

eğrisi üzerinde alınan  $M(x, y)$  noktasının yeni eksenlere göre koordinatlarını  $X, Y$  ile gösterirsek :

$$x = X - \frac{b'}{a'}, \quad y = Y + \frac{a}{a'}$$

dür. M noktasının  $x$  ve  $y$  koordinatları

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} \quad \text{veya} \quad y = \frac{ax + b}{a' \left( x + \frac{b'}{a'} \right)}$$

denklemi sağlayacağından :

$$Y + \frac{a}{a'} = \frac{a \left( X - \frac{b'}{a'} \right) + b}{a' \left( X - \frac{b'}{a'} + \frac{b'}{a'} \right)} = \frac{aX + \frac{a'b - ab'}{a'}}{a'X} = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{a'b - ab'}{a'}}{a'X}$$

$$Y = \frac{\frac{a'b - ab'}{a'^2}}{X} \quad \text{ve} \quad \frac{a'b - ab'}{a'^2} = A \quad \text{dersek}$$

$$Y = \frac{A}{X}$$

$$\text{olur. Ohalde, } y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

fonksiyonunun grafiği evvelce incelenen  $y = \frac{a}{x}$  şeklindedir.

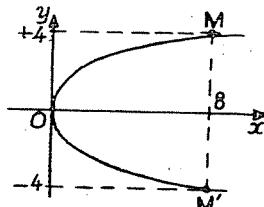
$O' \left( -\frac{b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right)$  noktası  $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$  nün grafiğinin simetri merkezi ve  $x = -\frac{b'}{a'}$ ,  $y = \frac{a}{a'}$  doğruları asymptotlardır.

**Örnekler :** I.  $y = x^2 - 6x + 5$  (1) fonksiyonunda  $x_0 = -\frac{b}{2a} = 3$ ,  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -4$  dür. (1) de  $x = 3 + X$ ,  $y = -4 + Y$  konurسا, yeni eksenlere göre fonksiyon,  $-4 + Y = (3 + X)^2 - 6(3 + X) + 5$  veya  $Y = X^2$  şeklini alır.

II.  $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$  (2) fonksiyonunda  $x_0 = -\frac{b'}{a'} = 1$ ,  $y_0 = \frac{a}{a'} = 2$  dir. (2) de  $x = 1 + X$ ,  $y = 2 + Y$  konursa, yeni eksenlere göre fonksiyon,  $2 + Y = \frac{2(1 + X) - 3}{1 + X - 1} = \frac{2X - 1}{X} = 2 - \frac{1}{X}$ ;  $Y = -\frac{1}{X}$  şeklini alır.

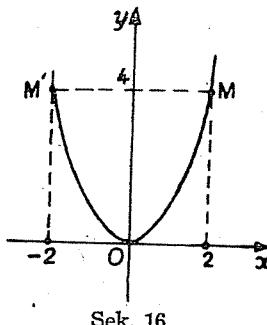
### § 5. KOORDİNAT EKSENLERİNE, BAŞLANGIÇ NOKTASINA GÖRE SİMETRİ

**97. Oy eksenine göre simetrik fonksiyon.** — Bu fonksiyonda  $x = m$  değerine karşılık  $y$ , simetrik değerler alırsa, bu fonksiyonun grafiği  $x$ -eksenine göre simetiktir.



Sek. 15

**98. Oy eksenine göre simetrik fonksiyon.** — Bu fonksiyonda  $x$  in  $(+m)$  ve  $(-m)$  değerlerine karşılık  $y$  aynı değeri alırsa bu fonksiyon  $Oy$  eksenine göre simetiktir (No. 78).



Sek. 16

Örnek:  $y^2 = 2x$  fonksiyonu  $x = 8$  için  $y = \pm 4$  değerlerini alır.  $M(8, 4)$ ,  $M'(8, -4)$  noktaları  $x$ -eksenine göre simetiktir.  $x$  in pozitif değerleri için daima bu durum olacağını  $y^2 = 2x$  fonksiyonu  $x > 0$  için  $x$ -eksenine göre simetiktir (Sek. 15).

Örnek:  $y = x^2$  fonksiyonunda  $x = \pm 2$  için  $y = 4$  değerini alır.  $M(+2, 4)$ ,  $M'(-2, 4)$  noktası  $Oy$  eksenine göre simetiktir (Sek. 16).

**99. Başlangıç noktasına göre simetrik fonksiyon.** — Bir fonksiyonda  $x$  in  $(+m)$  ve  $(-m)$  simetrik değerlerine karşılık  $y$  de simetrik değerler alırsa, bu fonksiyon başlangıç noktasına göre simetiktir (No. 88).

Örnek:  $y = \frac{3}{x}$  fonksiyonunda  $x = \pm 3$  için  $y = \pm 1$  olur.  $M(3, 1)$ ,  $M'(-3, -1)$  noktaları başlangıç noktasına göre simetiktir.  $x$  in bütün değerleri için durum aynı olduğundan  $y = \frac{3}{x}$  fonksiyonu başlangıç noktasına göre simetiktir.

**100.  $y = ax^2 + bx + c$  nin simetri özelliği.** — Bu fonksiyonun grafiğinin  $y = ax^2$  parabolünün tepe noktasının  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$  noktasına kaymış sekli olduğunu söylemişik ve  $y$ -eksenin  $y = ax^2$  parabolünün simetri ekseni idi (No. 96, Uygulama I). Ohalde,  $y = ax^2 + bx + c$

parabolünün tepe noktasından geçen  $x = -\frac{b}{2a}$  doğrusu bu parabolün simetri eksenidir. Yani  $x$ 'e  $\left(-\frac{b}{2a} + m\right)$  ve  $\left(-\frac{b}{2a} - m\right)$  gibi  $-\frac{b}{2a}$  ya göre simetrik değerler verilirse  $y$  nin aynı değeri aldığı görülür.

**101.  $y = \frac{a}{x}$  in simetri özelliği.** — Bu fonksiyonda  $x = \pm m$  değerlerine karşılık  $y = \pm \frac{a}{m}$  değerlerini alır. Ohalde, bu fonksiyon başlangıç noktasına göre simetiktir.

### § 6. TÜREVİN TANIMI VE GEOMETRİK ANLAMI

**102. Teğet tanımı.** — Bir ( $C$ ) eğrisi üzerinde sabit bir  $M$  noktası ile ona yakın  $P$  noktası alalım (Sek. 17).  $P$  noktası eğri üzerinde hareket ederek  $M$  ye yaklaşırsa  $MP$  keseninin doğrultusu değişir.  $P$  noktası bu harekete devam ederek  $M$  ye çok yaklaştığı zaman,  $MP$  keseninin aldığı limit duruma, eğrinin  $M$  noktasındaki **teğeti** denir,

Örnek:  $y = x^2$  eğrisi üzerinde apsis  $x_1 = 1$  olan  $M$  noktasının ordinatı  $y_1 = 1$  dir. (Sek. 18). Yine eğri üzerinde apsis  $x = 1 + h$  olan  $P$  noktasının ordinatı

$$y_2 = (1 + h)^2 = h^2 + 2h + 1$$

dir.  $MP$  nin eğimi :

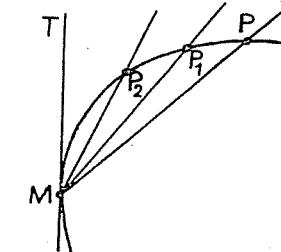
$$\frac{PH}{MH} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$$

olur.  $P$  noktası  $M$  ye çok yaklaşığı zaman  $MP$  keseninin limit durumu eğrinin  $M$  noktasındaki teğeti olur. Bu durumda  $h$  sıfıra yaklaşğından,  $MP$  nin eğimi olan  $h + 2$  de 2 ye yaklaşır.  $M(1, 1)$  noktasından geçen ve eğimi 2 olan bu teğetin denklemi

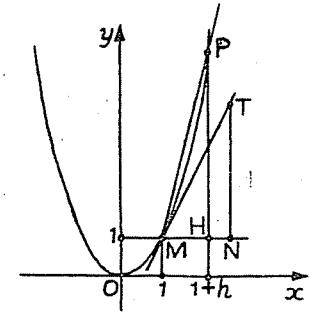
$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$

şeklinde olur.



Sek. 17



Sek. 18

Şekilde bu teget  $NT = 2MN$  olan  $MNT$  dik üçgeni yardımıyle çizilebilir.

**103. Artma miktarı.** — Yukarıki örnekte  $x$ 'e önce 1, sonra  $1+h$  değerini verdik. Burada  $h$ ,  $x$  in artma miktarıdır.

Genel olarak,  $y = f(x)$  fonksiyonunda  $x$ 'e verilen  $x_0$  ve  $x_1$  değerleri arasındaki

$$h = x_1 - x_0$$

farkına  $x$  in artma miktarı denir (*Değişkenin artma miktarı*).

$x$  in  $x_0$  değerine karşılık fonksiyon  $y_0 = f(x_0)$  ve  $x$  in  $x_1$  değerine karşılık fonksiyon  $y_1 = f(x_1)$  değerini alırsa

$$y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

farkına  $y$  nin artma miktarı denir (*Fonksiyonun artma miktarı*).

Bu artma miktarları pozitif, negatif veya sıfır olabilir.

$M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$  noktalarını birleştiren kesenin eğimi

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

dir.

**104. Türevin geometrik tanımı ve anlamı.** — Yukarıda eğri üzerinde  $M_0(x_0, y_0)$  noktasındaki teğetin eğimini,  $x_1, x_0$ 'a yaklaşığı zaman

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

kesrinin limit değeri olarak bulmuştuk.

$y = f(x)$  eğrisi üzerinde  $x = x_0$  noktasındaki teğetin eğimine fonksiyonun  $x = x_0$  için türevi denir.

**105. Türevin hesabı.** — Bir fonksiyonun  $x = x_0$  için türevi hesaplanmak istenirse :

1.  $x$ 'e  $x_0$  ve  $x_0 + h$  değerleri verilir.

2. Fonksiyonun bu değerlere karşı aldığı  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y = f(x_0 + h)$  değerleri bulunur.

3. Fonksiyonun artma miktarı olan

$$y - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

a,  $x$  in artma miktarı olan

$$(x_0 + h) - x_0$$

a bölünür.

4. Bu bölümde gereken kısaltmalar yapılır.

5.  $x$  in artma miktarı olan  $h$  sıfıra yaklaşığı zaman bu kesrin bir limit değeri bulunuyorsa, bu limit değer  $(x_0, y_0)$  noktasındaki teğetin eğimi ve fonksiyonun  $x = x_0$  için türevidir.

**106.  $y = ax^2 + bx + c$  nin türevi.** — Yukarıdaki fonksiyonda  $x$ 'e  $x_0$  ve  $x_0 + h$  değerlerini verelim :

$$f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$$

$$f(x_0 + h) = a(x_0 + h)^2 + b(x_0 + h) + c$$

olur. Burada fonksiyonun artma miktarı :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = 2ax_0h + bh + ah^2$$

dir. Fonksiyonun artma miktarının  $x$  in artma miktarına oranı :

$$\frac{2ax_0h + bh + ah^2}{h} = 2ax_0 + b + ah$$

olur.  $h$  sıfıra yaklaşığı zaman  $ah$  da sıfıra yaklaşır. Fonksiyonun  $x = x_0$  için türevi :

$$2ax_0 + b$$

bulunur.

**107.  $y = ax^2 + bx + c$  parabolünün tepe noktasındaki teğeti.** — Parabolün tepe noktasındaki apsisi :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

idi. Eğrinin  $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$  için türevi

$$2ax_0 + b = 2a\left(-\frac{b}{2a}\right) + b = 0$$

dir. Ohalbde, parabolün tepe noktasındaki teğetinin eğimi sıfır, yani bu teğet  $x$ -eksenine paraleldir.

- 108.**  $y = \frac{a}{x}$  in türevi. —  $y = \frac{a}{x}$  fonksiyonunda  $x$ 'e  $x_0$  ( $x_0 \neq 0$ ) ve  $x_0 + h$  değerlerini verelim.  $y$  nin artma miktarı :

$$\frac{a}{x_0 + h} - \frac{a}{x_0} = \frac{ax_0 - ax_0 - ah}{x_0(x_0 + h)} = \frac{-ah}{x_0(x_0 + h)}$$

dir. Fonksiyonun artma miktarının  $x$  in artma miktarına oranı :

$$\frac{-ah}{x_0(x_0 + h)} : h = \frac{-a}{x_0^2 + x_0 h}$$

olur.

$h$  sıfıra yaklaşığı zaman  $x_0 h$  de sıfıra yaklaşır ve  $y = \frac{a}{x}$  in  $x = x_0$  için türevi :

$$-\frac{a}{x_0^2}$$

bulunur.

**Örnek:**  $y = -\frac{2}{x}$  eğri üzerinde  $A(\frac{1}{2}, -4)$  noktasındaki teğetin eğimi :

$$-\frac{a}{x_0^2} = -\frac{-2}{\frac{1}{4}} = 8$$

dir.

**109.**  $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$  nün türevi. — Bu fonksiyonda  $x$ 'e  $x_0$  ( $x_0 \neq -\frac{b'}{a'}$ ) ve  $x_0 + h$  değerlerini verelim.  $x$  in bu değerlerine karşılık

$$y_0 = \frac{ax_0 + b}{a'x_0 + b'} \quad \text{ve} \quad y_1 = \frac{a(x_0 + h) + b}{a'(x_0 + h) + b'}$$

olur.  $y$  nin artma miktarı :

$$y_1 - y_0 = \frac{a(x_0 + h) + b}{a(x_0 + h) + b'} - \frac{ax_0 + b}{a'x_0 + b'} = \frac{(ab' - ba')h}{[a'(x_0 + h) + b'](a'x_0 + b')}$$

ve artma miktarlarının birbirine oranı,  $h$  ile kısaltılarak

$$\frac{ab' - ba'}{[a'(x_0 + h) + b'](a'x_0 + b')}$$

dür. Bu kesrin  $h$  sıfıra yaklaştığı zaman limit değeri :

$$\frac{ab' - ba'}{(a'x_0 + b')^2}$$

olur.

**Örnek:**  $y = \frac{2x-5}{x-3}$  eğrisi üzerinde  $A(0, \frac{5}{3})$  noktasındaki teğetin eğimi :

$$\frac{ab' - ba'}{(a'x_0 + b')^2} = \frac{-6+5}{(0-3)^2} = -\frac{1}{9}$$

dur.

**110. Uygulama I.**  $y = x^2 - 4x - 5$  parabolünün  $A(3, -8)$  noktasındaki teğetinin denklemi. — Teğetin eğimi,  $x=3$  için türeve eşit olduğundan

$$2ax_0 + b = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

dir.  $A(3, -8)$  noktasından geçen ve eğimi 2 olan doğru denklemi :

$$\begin{aligned} y + 8 &= 2(x - 3) \\ y &= 2x - 14 \end{aligned}$$

olur.

**II.**  $y = \frac{3}{x}$  eğrisinin  $A(1, 3)$  noktasındaki teğetinin denklemi. — Teğetin eğimi,  $x=1$  için türeve eşit olduğundan

$$-\frac{a}{x_0^2} = -\frac{3}{1^2} = -3$$

dür.

$A(1, 3)$  noktasından geçen ve eğimi -3 olan doğru denklemi :

$$\begin{aligned} y - 3 &= -3(x - 1) \\ y &= -3x + 6 \end{aligned}$$

olur.

III.  $y = \frac{2x+1}{x-7}$  eğrisi üzerinde A(8, 17) noktasındaki teğet denklemi. — Teğeten eğimi  $x=8$  için türeviden eşit olduğundan

$$\frac{ab' - ba'}{(a'x_0 + b')^2} = \frac{-14 - 1}{(8 - 7)^2} = -15$$

dir.

A(8, 17) noktasından geçen ve eğimi  $-15$  olan doğru denklemi:

$$y - 17 = -15(x - 8)$$

$$y = -15x + 137$$

olur.

### ALIŞTIRMALAR

1. O'(1, 3) noktasından  $Ox$ ,  $Oy$  eksenlerine  $O'X$ ,  $O'Y$  paralellerini çiziliyor. Aşağıdaki doğruların yeni eksenlere göre denklemelerini bulunuz:

$$1^\circ y = 0,5x$$

$$2^\circ y = -\frac{1}{3}x$$

$$3^\circ y = x$$

$$4^\circ y = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$5^\circ y = -4x$$

$$6^\circ y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$7^\circ y = -3x - 5$$

$$8^\circ y = 0,2x - 1$$

$$9^\circ y = -2x + 4$$

2. O'(-1, 2) noktasından  $Ox$ ,  $Oy$  eksenlerine  $O'X$ ,  $O'Y$  paralellerini çiziliyor. Aşağıdaki parabollerin yeni eksenlere göre denklemelerini bulunuz:

$$1^\circ y = 3x^2$$

$$2^\circ y = -\frac{1}{2}x^2$$

$$3^\circ y = x^2 + 3$$

$$4^\circ y = -2x^2 + 8$$

$$5^\circ y = 3x^2 - 12$$

$$6^\circ y = \frac{1}{3}x^2 + 3$$

$$7^\circ y = x^2 + 2x + 1$$

$$8^\circ y = x^2 - 3x + 2$$

$$9^\circ y = 2x^2 - 4x + 5$$

3. O'(-2, -3) noktasından  $Ox$ ,  $Oy$  eksenlerine  $O'X$ ,  $O'Y$  paralellerini çiziliyor. Aşağıdaki eğrilerin yeni eksenlere göre denklemelerini bulunuz:

$$1^\circ y = \frac{2}{x}$$

$$2^\circ y = -\frac{3}{x}$$

$$3^\circ y = \frac{0,4}{x}$$

$$4^\circ y = \frac{3}{2x}$$

$$5^\circ y = -\frac{4}{5x}$$

$$6^\circ y = -\frac{1}{x}$$

6. Aşağıdaki eğrilerin karşıslarında yazılı noktalarındaki teğet bulunuz:

$$1^\circ y = x^2 - x + 1 \quad x = 3 \text{ için} \quad 2^\circ y = -3x^2 + 2x + 5 \quad x =$$

$$3^\circ y = x^2 - 4x - 1 \quad x = 0 \rightarrow \quad 4^\circ y = \frac{2}{x} \quad x =$$

$$5^\circ y = -\frac{6}{x} \quad x = 3 \rightarrow \quad 6^\circ y = \frac{0,5}{x} \quad x =$$

$$7^\circ y = \frac{x + 2}{3x + 4} \quad x = 0 \rightarrow \quad 8^\circ y = \frac{1-x}{1+x} \quad x =$$

7.  $y = -\frac{1}{x}$  fonksiyonu veriliyor:

1° Grafiğini çiziniz.

2° Eğri üzerinde  $x = 3$  ve  $x = \frac{1}{3}$  noktalarındaki teğet denklemle

3° İki teğeten kesim noktasının  $xOy'$  açısının açıortayı üzerine rast teriniz.

8.  $y = 2x^2 - 6x + 3$  ve  $y = x^2 - 2x - 1$  paraboleri veriliyor:

1° Değişimlerini inceleyiniz ve grafiklerini çiziniz.

2° Bir ortak noktası ve ortak teğeti olduğunu gösteriniz. Bu ortak lemini yazınız.