

## LİSE KİTAPLARI

Kitabın adı	Yazan	Kurus
Metinlerle Türk ve Batı Edebiyatı I	Nihat Sami Banarlı	630
Metinlerle Türk ve Batı Edebiyatı II	» » »	610
Metinlerle Türk ve Batı Edebiyatı III	» » »	1190
Örnek Dilbilgisi ... ... I. II. III.	H. Ediskun - B. Dürder	430
Tarih ... ... I	E. Oktay - N. Aksit	520
Tarih ... ... II	Niyazi Akşit	505
Tarih ... ... III	» »	645
Genel Coğrafya ... ... ...	Rauf Seymen	450
Ülkeler Coğrafyası ... ...	» »	595
Türkiye Coğrafyası ... ...	» »	470
Sosyoloji ... ...	Osman Pazarlı	565
Mantık ... ...	» »	350
Yeni Psikoloji ... ...	Lütfi Öztabağ	470
Felsefe ... ...	» »	350
Sosyoloji ... ...	Ekrem Altay	470
Cebir ... ... I	Arif Akcabay	490
Cebir ... ... II	» »	520
Cebir ... ... Edebiyat ... II	» »	280
Cebir ... ... Fen ... III	» »	600
Cebir ... ... Edebiyat ... III	» »	280
Geometri ... ... I	» »	450
Geometri ... ... II	» »	400
Geometri ... ... Edebiyat ... II	» »	260
Biyoloji ... ... I	Ö. Bediî Tardu	575
Biyoloji ... ... II	M. A. Binal - B. Tardu	395
Biyoloji ... ... I	Vardar - Öztiç - Ardıç	650
Fizik ... ... I	Haydar Çağlayan	525
Fizik ... ... II	» »	585
Fizik ... ... III	» »	560
Fizik ... ... Edebiyat ... III	» »	380
Kimya ... ... I	M. Baç - N. Baç	470
Kimya ... ... Fen ... II	» »	520
Kimya ... ... Edebiyat ... II	» »	400
Kimya ... ... Fen ... III	» »	500
Kimya ... ... Edebiyat ... III	» »	320
Logaritma ... ...	N. Kürkçüoğlu	200
Matematik Cep Kitabı ... ...	Arif Akcabay	600

Arif Akcabay

## CEBİR

LİSE I.SINIF



REMZİ KİTABEVİ

Fiyatı 490 Kuruş

REMZİ KİTABEVİ

## İÇİNDEKİLER

### BÖLÜM: I.

Tam sayılar								
A — Tarifler	...	...	...	...	...	...	...	1
B — Tam sayıların dört işlemi	...	...	...	...	...	...	...	4
C — Tam sayıların bölünebilme şartları ve asal sayılar	...							8
D — Kesirler ve dört işlemi	...	...	...	...	...	...	...	15

### BÖLÜM: II.

#### Cebirsel sayı anlamı, cebirsel sayıların dört temel işlemi

Cebirsel sayı anlamı, cebirsel sayıların dört temel işlemi, pozitif ve negatif sayılar	...	...	...	...	...	...	...	19
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

### BÖLÜM: III.

#### Cebirsel ifade anlamı ve cebirsel ifadelerin dört işlemi

A — Tarifler	...	...	...	...	...	...	...	35
B — Cebirsel ifadelerin toplamı	...	...	...	...	...	...	...	39
C — Cebirsel ifadelerin çıkarılması	...	...	...	...	...	...	...	41
D — Parantezli ifadeler	...	...	...	...	...	...	...	43
E — Cebirsel ifadelerin çarpımı	...	...	...	...	...	...	...	45
F — Bir ifadenin karesi	...	...	...	...	...	...	...	49
G — Cebirsel ifadelerin bölümü	...	...	...	...	...	...	...	51
H — Sorular	...	...	...	...	...	...	...	56
I — Özdeşlikler	...	...	...	...	...	...	...	57
K — Çarpanlara ayırma	...	...	...	...	...	...	...	61
L — Cebirsel ifadelerde E.B.O.B ve E.K.O.K	...	...	...	...	...	...	...	75

### BÖLÜM: IV.

#### Kesirli cebirsel ifadeler ve dört işlemi

A — Rasyonel kesirler ve özellikleri	...	...	...	...	...	...	...	78
B — Rasyonel kesirlerin dört işlemi	...	...	...	...	...	...	...	83

### BÖLÜM: V.

Gran ve oranti	...	...	...	...	...	...	...	86
----------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	----

**Denklemler**

A — Tarifler ve özellikler	...	...	...	...	...	...	104
B — Basit denklemler	...	...	...	...	...	...	106
C — Parantezli denklemler	...	...	...	...	...	...	107
D — İçinde çarpana işlemi bulunan denklemler	...	...	...	...	...	...	108
E — İçinde kuvvet bulunan denklemler	...	...	...	...	...	...	109
F — Paydalarında sayı bulunan denklemler	...	...	...	...	...	...	110
G — Paydalı denklemler	...	...	...	...	...	...	114
H — Harfli denklemler	...	...	...	...	...	...	117
i — Daha güç denklemler	...	...	...	...	...	...	119

**BÖLÜM: VI.**

**Bir bilinmiyen yardımıyle çözülebilem problemeler**

A — Sayı problemleri	...	...	...	...	...	...	121
B — Yaş problemleri	...	...	...	...	...	...	129
C — Faiz problemleri	...	...	...	...	...	...	131
D — Hareket problemleri	...	...	...	...	...	...	132
E — Ortak iş görme problemleri	...	...	...	...	...	...	134
F — Karışım problemleri	...	...	...	...	...	...	136
G — Geometri problemleri	...	...	...	...	...	...	136

**BÖLÜM: VII.**

**Birinci derecede iki bilinmiyenli denklem sistemleri**

A — Birinci dereceden iki bilinmiyenli denklem sistemi	...	...	...	...	...	...	140
B — Birinci derece çeşitli denklem sistemlerine ait örnekler.	...	...	...	...	...	...	146
C — Birinci derece üç bilinmiyenli denklem sistemleri	...	...	...	...	...	...	153
D — İki ve daha fazla bilinmiyenli denklemler yardımıyle çözülebilen problemler	...	...	...	...	...	...	156

**BÖLÜM: VIII.**

**Eşitsizlikler**

**Fonksiyonlar**

A — Fonksiyon fikri	...	...	...	...	...	...	170
B — Koordinat sistemi	...	...	...	...	...	...	170
C — Grafikle gösterme	...	...	...	...	...	...	186

**BÖLÜM: I**

**Tam sayılar**

**A — Tarifler:**

1 — Bir dolapta ki kitaplar, bir şehrin nüfusu, bir caddenin eni gibi çoğalıp azalması, sayılıp ölçülmeli mümkün olan her şeye kemiyet veya miktar denir.

Bir sürü koyun, bir sıra ağaç gibi kemiyetlerin birimleri (koyun, ağaç) birbirinden ayırdır. Bunları sayma kifayet eder.

Bir duvarın boyu, bir taşın ağırlığı nevinden kemiyetlerin ise birbirinden ayrı birimleri olmayıp bunlar bir kül şeklinde dir. Bunları ölçmek veya tartmak, yani duvarın ne kadar metre uzunluğunda, taşın ne kadar kilo ağırlığında bulunduğu aramak, lâzım gelir.

Şu halde, bir kemiyeti saymak veya ölçmek, o kemiyeti kendi cinsinden bulunan veya birim denilen diğer bir kemiyetle mukayese etmek demektir.

Miktarları saymak veya ölçmek için sayılar kullanılır.

Bir kümenin bir tek elemanını alırsak buna (Bir) deriz. Sayilar; bir'e art arda bir ekliyerk teşkil olunurlar. Yani:

Bir,

Bir'e bir eklenirse iki,

İki'ye bir eklenirse üç,

Üç'e bir eklenirse dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, onbir, oniki... şeklinde sonu olmayanibrçok sayılar elde edilir. Herhangi bir kümede kaç birim bulunduğu anlamak için zihnin yaptığı işleme sayma denir.

Bu şekilde elde edilen sayılar dizisine tam sayılar (tabii sayılar) denir.

**2 — Tam sayıların yazılması ve okunması:**

Sayıları yazmak için rakam dediğimiz işaretler kullanılır. Sıfırdan başlamak üzere,

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sıfır	Bir	İki	Üç	Dört	Beş	Altı	Yedi	Sekiz	Dokuz

şeklinde 10 tane rakam vardır. On sayısını 10 şeklinde yazacağız.

Burada 0 birler rakkamını, 1 de onlar rakkamını gösterir. Onbir yazmak için soldaki sıfır yerine 1, oniki yazmak için 2..... koyarız.

11 12 13 14 15 16 17 18 19

Yirmiyi 20 şeklinde yazarız.

20 30 40 50 60 70 80 90

Bu sayılara katılacak herhangi bir sayı sıfır yerine yazılarak ifade edilir.

70 sayısına katılacak 3 sayısı 73 şeklinde yazılır ve yetmiş üç diye okunur.

Bu şekilde : Yüz 100

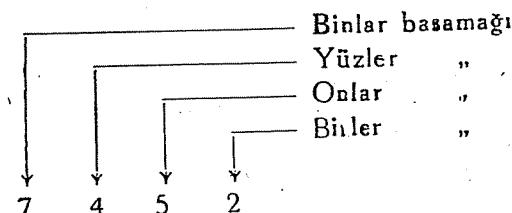
Bin 1000

On bin 10000

....

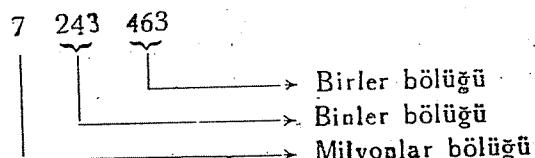
şeklinde yazılır.

7452 sayısını düşünelim. Burada 2 sayısı birleri, 5 sayısı onları, 4 sayısı yüzleri, 7 sayısı binleri gösterir ve yedi bin dört yüz üç diye okunur.



Bir sayının sağından itibaren rakamları üçer üçer ayırsak birinci üç sayıya birler, ikinci üç sayıya binler, üçüncü üç sayıya milyonlar, milyarlar, trilyonlar, katrilyonlar .... bölümü denir.

Aşağıda yedi milyon iki yüz kırk üç bin dört yüz altmış üç sayısını bölgümlere ayrılarak yazılmıştır.



Bu türlü sayı sistemine ondalık sayı sistemi denir. (Gerekirse, orta okul ve ilk okul kitaplarındaki tam sayı bölümünü okuyunuz).

### 3 — Bir sayının açık şekilde yazılması :

Bir sayıyı meydana getiren her basamaktaki rakamların ayrı ayrı manaları olduğunu unutmamalıdır. Her bir rakam, hemen sağında bulunan rakamdan on kat fazla değer taşır. Meselâ : 37863 sayısında :

3 Üç tane bir

6 6 tane on

800 8 tane yüz

7000 7 tane bin

30000 3 tane on bin vardır. Bu sayı : 37863

$$3 + 60 + 800 + 7000 + 30000 = 37863$$

Şeklinde düşünürüz. Bu türlü yazıda 37863 sayısının açık yazılışı denir. Rakam bulunmayan basamağın yerine (0) konur.

### 4 — Konkre ve abstre sayılar :

3 kitap, 5 kalem, 25 öğrenci gibi etrafımızdaki eşayı belirtmek üzere söylenilen sayılara konkre sayılar denir.

Herhangi bir şeyi belirtmeden zihnin düşündüğü sayılar abstre sayılar denir. 3, 5, 16.... gibi. Bu sayıların sonu yoktur.

### 5 — Tam sayıların bir yarımlı doğru üzerinde gösterilmesi :

Başlangıç noktası O olan, sağa doğru uzayan bir Ox yarımlı doğrusunu alalım.

Bir de birim uzunuğu olarak kabul ettigimiz KL doğru parçasını düşünelim :

K	L	O	A	B	C	D	E	x
Birim uzunluğu	0	1	2	3	4	5		

O dan itibaren bu seçtiğimiz birim uzunluğu kadar ardarda A, B, C, D, E... noktalarını işaretleyelim. O noktasına sıfır dersek A noktası (1)i, B noktası (2) yi, C noktası (3) ü... gösterir.

Burada A noktasına ( $OA = 1$  olduğu için) seçilen birime göre 1 in geometrik timsali denir.  $OB = 2$ ,  $OC = 3$ ,  $OD = 4$ ... olur. Böylece sayıların geometrik olarak gösterilmeleri temin edilir. Bu şekilde tam sayıların geometrik timsallerini taşıyan yarımlı doğrusu denir.

### B — Tam sayıların dört işlemi

#### 1) Toplama

İki ve daha fazla sayı yerine bunların toplamına eşit bir sayı bulmak için :

a) Aynı adlı basamakları altalta yazınız.

b) Önce birler, sonra onlar, daha sonra yüzler, binler... basamaklarını toplayınız. Her basamak toplanırken bir üst basamağa ait sayı bulunursa onu (elde var diyerek) kendi basamağına ekleyiniz. Toplanacak iki sayı arasında (+) artı işaretini konur.

$$\begin{array}{r} 415 = 400 + 10 + 5 \\ + 342 = 300 + 40 + 2 \\ \hline 757 = 700 + 50 + 7 \end{array}$$

#### Sorular :

1) Aşağıdaki toplamları yapınız :

1) $315 + 712 + 13 =$	4) $2167$	5) $2007$
$\begin{array}{r} 315 \\ + 712 \\ \hline 1027 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2167 \\ + 13 \\ \hline 2180 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2007 \\ + 5 \\ \hline 2012 \end{array}$
2) $105 + 1263 + 411 =$	$\begin{array}{r} 105 \\ + 1263 \\ \hline 1368 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9083 \\ + 41 \\ \hline 9124 \end{array}$
$\begin{array}{r} 105 \\ + 1263 \\ \hline 1368 \end{array}$	$\begin{array}{r} 41 \\ + 411 \\ \hline 452 \end{array}$	$\begin{array}{r} 751 \\ + 36 \\ \hline 787 \end{array}$
3) $868 + 1035 + 125 =$	$\begin{array}{r} 868 \\ + 1035 \\ \hline 1803 \end{array}$	$\begin{array}{r} 125 \\ + 36 \\ \hline 161 \end{array}$

2) Aşağıdaki toplamlarda noktaların yerlerindeki rakamları yazınız.

1) $537.$	2) $.3629$	3) $.183.7$
$\begin{array}{r} .537 \\ .58 \\ 86.9 \\ .427 \\ \hline 19104 \end{array}$	$\begin{array}{r} .3629 \\ 1143 \\ 22584 \\ \dots \\ \hline 83290 \end{array}$	$\begin{array}{r} .183.7 \\ 64582 \\ 336. \\ 9624 \\ \hline 84.26 \end{array}$

#### 2) Çıkarma :

İki sayının büyüğünden küçüğünü çıkarmak için :

a) Aynı adlı basamakları altalta yazınız :

b) Önce birler, sonra onlar, yüzler.. basamaklarını birbirinden çıkarınız. Çıkarılan basamak daha büyük olursa ne yaparsınız ?

Cıkarma işaretini (-) eksi olup çıkarılacak sayının önüne konur.

#### ÖRNEK :

$$(\text{Eksilen}) \quad 4568 = 4000 + 500 + 60 + 8$$

$$(\text{Çıkarılan}) - 2154 = 2000 + 100 + 50 + 4$$

$$(\text{Fark }) \quad 2414 = 2000 + 400 + 10 + 4$$

Çıkarılanla fark toplandığı zaman hangi sayıyı elde edersiniz ?

Bir çıkarmada, çıkarılanla farkın toplamı eksilene eşittir.

#### Sorular :

1) Aşağıdaki çıkarmaları yapınız.

$\cancel{5763}$	$20063$	$10000$
$\underline{- 1849}$	$\underline{- 1974}$	$\underline{- 9681}$

2) Aşağıdaki çıkarmalarda noktaların yerine gerekli işlemleri yaparak sayıları bulunuz.

1) $6893$	$5962 \times$	$\dots$
$\underline{- \dots}$	$\underline{- \dots}$	$\underline{- 1282}$
$1675$	$4126$	$2691$
2) $9.4.$	$.43$	$\cancel{.6.7.}$
$\underline{- .7.3}$	$\underline{- 35 ..}$	$\cancel{\underline{+ 136.2}}$
$3716$	$1225$	$73112$

#### 3) Çarpma :

Bir sayıyı başka bir sayı ile çarpmak demek, birinci sayıyı ikinci sayı kadar yazıp toplamak demektir.

Çarpılacak iki sayı arasında ( $\times$  veya  $\cdot$ ) çarpı işaretini konur.

#### Örnek 1.

$$16 \times 5 = 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = 80$$

$$16 \times 5 = 80$$

çarpılan çarpan çarpım

#### Örnek 2.

$2316 \times 253$  çarpımını yapınız.

$$253 = 200 + 50 + 3$$

yazılışını hatırlayarak aşağıdaki işlemi inceleyiniz.

$$\begin{array}{r}
 2316 \\
 \times 253 \\
 \hline
 6948 \quad 2316 \times 3 = 6948 \text{ (birinci basamakla çarpım)} \\
 115800 \quad 2316 \times 50 = 115800 \text{ (ikinci basamakla çarpım)} \\
 463200 \quad 2316 \times 200 = 463200 \text{ (üçüncü basamakla çarpım)} \\
 \hline
 585948
 \end{array}$$

Bir çarpmayı yaparken ;

a) Çarpanın birler basamağını çarpılanla çarpınız.

b) Çarpanın onlar basamağını çarpılanla çarpınız.

Elde edilen çarpımı kendinden evvelki çarpıma nazaran bir basamak sola kaydırarak yazınız.

c) Her basamak için çarpıma devam ediniz ve bunları toplayınız.

#### Sorular :

1) Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

$\cancel{217} \times 6$	$\cancel{426}$	$\cancel{3051}$
$\cancel{318} \times 712$	$\times 363$	$\times 102$

2) Bir sayı: 10 ; 100 ; 1000 .... ile çarpmak için ne yaparsınız ?

3) Aşağıdaki çarpmalarda noktaların yerlerine gerekli işlemleri yaparak sayıları bulunuz.

$$\begin{array}{r} \cancel{1} 0. \\ \cancel{8} \\ \hline 2851440 \end{array} \quad \begin{array}{r} .8.3 \\ 6 \\ \hline .7118 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5.42 \\ 6 \\ \hline 3.85. \end{array}$$

#### 4 — Bölme:

Bir sayıyı diğer bir sayıya bölmek demek, birinci sayıda ikinci sayının kaç defa olduğunu bulmak demektir. Bölme işaretti ( $:$ ) veya ( $\div$ ) şeklindedir.

$$65 : 5 = 13$$

Bölenen      Bölen      Bölüm

Örnek;  $8232 : 6$  Bölmesini yapınız.

$$\begin{array}{r} 8000 + 200 + 30 + 2 \\ - 6000 \\ \hline 2000 + 200 = 2200 \\ - 1800 \\ \hline 400 + 30 = 430 \\ - 420 \\ \hline 10 + 2 = 12 \\ - 12 \\ \hline 00 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 6 \\ \hline 1000 + 300 + 70 + 2 = 1372 \end{array} \right.$$

Kısa olarak:

$$\begin{array}{r} 8232 \\ - 6 \\ \hline 1372 \end{array}$$

Şeklinde bölme yapılır.

Kalansız bir bölmeye, bölümle böleni çarparsanız bölüneni elde edersiniz.

$$84 : 4 = 21 \rightarrow 21 \times 4 = 84 \text{ buluruz.}$$

Kalanlı bir bölmeye ise;

$$\text{Bölenen} = \text{Bölen} \times \text{Bölüm} + \text{Kalan}$$

olur.

#### Sorular:

1) Aşağıdaki bölmeleri yapınız.

$$2368 : 9 \quad 7968 : 15 \quad 90071 : 26$$

$$10576 : 105 \quad 10370 : 718 \quad 86000 : 965$$

2) Aşağıdaki ? işaretlerinin yerlerine sayılar bulunuz.

$$? : 48 = 3585 ; \quad 9125 : ? = 365$$

$$59524 : ? = 2834 ; \quad ? : 78 = 342$$

#### C — Tam sayıların bölünebilme şartları ve asal sayılar

##### 1 — Bir bölmeye;

$$a = b \cdot c + k$$

$$\text{Bölenen} = \text{Bölen} \times \text{Bölüm} + \text{Kalan}$$

Olduğunu görmüşük.

Bölmeye, kalan sıfır olursa bu bölmeye kalansız bölmeye veya tam bölmeye denir.

Kalansız bir bölmeye, böle in herhangibir katı bölüneni verir.

$$a = b \cdot c$$

$b$  sayısı  $a$  yi tam bölerse,  $b$  ye  $a$  nin böleni denir.

Yani  $b$  nin katları olan sayılar  $a$  yi verecektir.

Netice:

1: Bir sayı ancak katlarının böleni olabilir.

2: Her sayı (1) le kalansız olarak bölünür.  $a : 1 = \frac{a}{1} = a$

3: Her sayı kendisi ile kalansız olarak bölünür.  $a : a = \frac{a}{a} = 1$

4: Bir sayının sonlu sayıda bölesi vardır. Bunlar içinde en küçük olanı (1), en büyük olanı kendisidir.

2 — a) Bir sayı, birçok sayıları ayrı ayrı bölerse bunların toplamını da böler.

$m$  sayısı  $a, b, c$  sayılarını bölerse

$$a = m \cdot x$$

$$b = m \cdot y$$

$$c = m \cdot z$$

şeklinde yazılabilir. Toplanırsa,

$$(a+b+c) = m(x+y+z)$$

$x, y, z$  tam sayılar olduklarından toplamları da tam sayı olur. Şu halde  $a+b+c$  toplamı  $m$  nin bir katı olur.

b) Bir sayı, ki sayıyı ayrı ayrı bölerse bunların farkını da böler:

$m$  sayısı  $a$ ,  $b$  sayılarını bölerse,

$$a = m \cdot x$$

$$b = m \cdot y \quad \text{şeklinde yazılabilir. Çıkarılırsa}$$

$$a - b = m(x - y) \quad \text{bulunur.}$$

$x$ ,  $y$  sayıları tam sayı olduklarından farkları da tam sayı olur. Şu halde  $a - b$  farkı  $m$  nin bir katı olur.

c) Bir sayı diğer bir sayıya bölünyorsa bunun herhangi bir katı da o sayıya bölünür.

Meselâ: 3 sayısı 9 u böldüğünden  $2 \cdot 9 = 18$  i,  $3 \cdot 9 = 27$  yi,  $3 \cdot 10 = 30$  .. u da böler

#### Bölünebilme şartları:

##### 3 — 2 ve 5 ile bölünebilme:

a) Ancak birler basamağı 0,2,4,6,8 olan, sayılar 2 sayısı ile bölünebilir.

Meselâ: 256 sayısını

$$\begin{aligned} 256 &= 200 + 50 + 6 \\ &= 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \end{aligned}$$

şeklinde yazarsak, bu toplamın  $2 \cdot 100$  ve  $5 \cdot 10$  terimleri 2 nin katıdır. Birler basamağında olan 6 da 2 nin katı olduğundan 256 sayısı 2 ye bölünür.

b) Ancak birler basamağı 0 ve 5 olan sayılar 5 sayısı ile bölünebilir.

Meselâ: 375 sayısı

$$\begin{aligned} 375 &= 300 + 70 + 5 \\ &= 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \end{aligned}$$

Şeklinde yazılırsa, bu toplamın  $3 \cdot 100$  ve  $7 \cdot 10$  terimleri 5 in katlarıdır. Birler basamağında olan 5 de bölünebileceğinden 375 sayısı 5 ile bölünebilir. Netice olarak;

Bir sayının 2 ve 5 ile bölünebilmesi için birler basamağındaki sayıının 2 veya 5 ile bölünebilmesi lâzımdır.

##### 4 — 4 ve 25 ile bölünebilme:

Meselâ, 5436 sayısını düşünelim. Bu sayıyı,

$$5436 = 54 \cdot 100 + 36.$$

şeklinde yazarsak, birinci terim  $54 \cdot 100$  hem 4 le hemde 25 le bölünebilir. Şu halde geriye kalan 36 nin 4 veya 25 le bölünebilmesi gereklidir. 36 sayısı 4 le bölünebildiği için 5436 sayısı da 4 de bölünür.

Netice olarak:

Bir sayının 4 veya 25 ile bölünebilmesi için, bu sayının son iki rakamını teşkil eden sayının da 4 veya 25 ile bölünebilmesi lâzım ve kâfidir.

##### 5 — 8 veya 135 ile bölünebilme:

Meselâ 12375 sayısını düşünelim. Bu sayıyı,

$$12375 = 12 \times 1000 + 375$$

şeklinde yazabiliyoruz.

Birinci terim olan  $12 \times 1000$  sayısı hem 8 hem de 125 ile bölünebilir. Şu halde geriye kalan 375 sayısının 8 veya 125 e bölünebilmesi lâzımdır. Burada 375 sayısı 125 e bölünebildiğinden 12375 sayısı da 125 e bölünür.

Netice olarak:

Bir sayının 8 veya 125 e bölünebilmesi için, o sayının son üç rakamını teşkil eden sayının da 8 veya 125 e bölünebilmesi lâzım ve kâfidir.

##### 6 — 3 ve 9 ile bölünebilme:

Meselâ 8262 sayısını düşünelim. Bu sayıyı,

$$8262 = 8 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 2 \dots \dots (1)$$

Şeklinde yazabiliyoruz.

$10 = 1 + 9$ ,  $100 = 1 + 99$ ;  $1000 = 1 + 999 \dots$  olduğundan (1) eşitliğini,

$$\begin{aligned} 8262 &= 8 \cdot (1 + 999) + 2 \cdot (1 + 99) + 6 \cdot (1 + 9) + 2 \\ &= 8 + 8 \cdot 999 + 2 + 2 \cdot 99 + 6 + 6 \cdot 9 + 2 \\ &= (8 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 6 \cdot 9) + (8 + 2 + 6 + 2) \\ &\quad \{ = 9(8 \cdot 111 + 2 \cdot 11 + 6 \cdot 1) + (8 + 2 + 6 + 2) \end{aligned}$$

Şeklinde yazarız. ~~numerever Değin~~

Burada (1) nci terim 3 ün veya (9) un katıdır. İkinci terim ise rakamlar toplamıdır. Bu 3 ün veya 9 un katı olursa sayı 3 veya 9 ile bölünebilecektir. Burada rakamlar toplamı olan  $8 + 2 + 6 + 2 = 18$  sayısı 3 ve 9 ile bölünebildiğinden 8262 sayısı 3 ve 9 ile bölünebilir.

Netice olarak :

Rakamları toplamı 3 un katı olan sayı 3 ile bölünebilir. 9 un katı olan sayı 9 ile bölünür.

##### 7 — 11 ile bölünebilme :

Aşağıdaki eşitlikleri inceleyiniz.

$$\begin{array}{rcl} 10 &= 11 & -1 = \text{kat } 11 - 1 \\ 100 &= 99 & +1 = \text{kat } 11 + 1 \\ 1000 &= 990 & +11 - 1 = \text{kat } 11 - 1 \\ 10000 &= 9999 & +1 = \text{kat } 11 + 1 \\ 100000 &= 99990 & +11 - 1 = \text{kat } 11 - 1 \end{array}$$

63613 sayısının 11 ile bölünüp bölünmediğini araştıralım:

Bu sayıyı,

$$63613 = 60000 + 3000 + 600 + 10 + 3$$

$$60000 = 6 \cdot 10000 = \text{kat } 11 + 6$$

$$3000 = 3 \cdot 1000 = \text{kat } 11 - 3$$

$$600 = 6 \cdot 100 = \text{kat } 11 + 6$$

$$10 = 1 \cdot 10 = \text{kat } 11 - 1$$

$$3 = 3 = + 3$$

$$\underline{63613} = \text{Kat } 11 + (6 + 6 + 3) - (3 + 1)$$

seklinde yazabiliyoruz.

63613 sayısı üç terim şecline gelmiş oldu. Birinci terim 11 in katıdır. İkinci terim  $(6 + 6 + 3)$  verilen sayısının sağдан itibaren (1)inci, (3)üncü, (5)inci terimleri toplamıdır. (2)nci ve (4)ncü terimler toplamı  $(3 + 1)$  dir. Şayet bu iki toplam farkı yani,  $(6 + 6 + 3) - (3 + 1)$  sayısı 11 veya 11 in katı ise verilen sayı 11 ile bölünebilecektir.

Burada görülmüyor ki 63613 sayısı 11 le bölünebilir. Netice olarak:

Bir sayının 11 e bölünebilmesi için sağdan itibaren tek ve çift basamaklardaki rakamlar toplanır ve birbirinden çıkarılır. Kalan (0) veya 11 in katı ise bu sayı 11 e bölünür.

**Not:** Bazan teklerin rakamları toplamı çiftlerin rakamları toplamından küçük çıkabilir. Bu zaman büyükten küçük çıkarılabilir ve sonucun (0) veya 11 in katı olup olmadığına bakılır.

**Örnek:** 105336 sayısını için,

$$(6 + 3 + 0) - (3 + 5 + 1) = 0$$

Şuhalde bu sayı 11 e bölünebilir.

**Not:** Araştırmasını yapmadan aşağıda 7 ve 13 ile bölünebilme kaidelerini örneklerle gösteriyoruz:

a) Üç rakamlı bir sayının 7 ile bölünebilmesi için, birler basamağına onlar basamağının 3 katı ve yüzler basamağındaki rakamın 2 katı eklenir. Bu sayı 7 ve 7 nin katı ise bu üç rakamlı sayı 7 ile bölünür.

**Örnek:** 532 sayısını alalım.

$$2 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 21 = 3 \cdot 7$$

Şuhalde 532 sayısı 7 ile bölünür.

b)-Üç rakamlı bir sayının 13 ile bölünebilmesi için, birler ve onlar basamağından müteşekkil sayıya yüzler basamağındaki sayının 9 katı eklenir. Bu sayı 13 veya 13 ün katı ise bu üç rakamlı sayı 13 ile bölünür.

**Örnek:** 468 sayısını alalım :

$$68 + 4 \cdot 9 = 104 = 8 \cdot 13$$

**Genel olarak:** Bir sayının 7 veya 13 e bölünebilmesi için sağdan

itibaren üçer basamaklı tek mertebeden bölüklerin sayıları toplamı çift mertebeden bölükler toplamından çıkarılır. Elde edilen sayı 7 veya 13 le bölünürse sayı da 7 veya 13 le bölünebilir.

**Örnek:** 5527501 sayısının 7 ile bölündüğünü görmek için:

3	2	1
5	527	501
tek	çift	tek

Tek bölümler toplamı :

$$501 + 5 = 506 \text{ olur.}$$

çift bölükler toplamından tek bölükler toplamı çıkarılır.

$$527 - 506 = 21 = 3 \cdot 7$$

Elde edilen sayı 7 ye bölündüğü için 5527501 sayısı da 7 ile bölünür.

**9 —** Aşağıdaki bölünebilme kaidelerini inceleyiniz.

Sayı

Bölünebilme kaideleri

- X genel
- 2 — Çift sayı olmalı (son rakamı sıfır veya çift)
  - 3 — Rakamlar toplamı 3 veya 3 ün katı olmalı.
  - 4 — Son rakamının sayısı 4 veya 4 ün katı olmalı.
  - 5 — Son rakamı sıfır veya 5 olmalı,
  - 6 — Hem 2 hem 3 le bölünebilmeli.
  - 7 — Sağdan itibaren üçer basamaklı tek mertebeden bölüklerin sayıları toplamından çift mertebeden bölüklerin sayıları toplamı birbirinden çıkarılır. Kalan 7 veya 7 nin katı olmalı.
  - 8 — Son üç rakamının sayısı 8 in katı olmalı.
  - 9 — Rakamları toplamı 9 veya 9 un katı olmalı.
  - 10 — Son rakamı sıfır olmalı.
  - 11 — Sağdan itibaren tek ve çift basamaklardaki rakamlar toplanır ve birbirinden çıkarılır. Kalan 11 veya 11 in katı olmalı,
  - 12 — Hem 3 hem 4 le bölünebilmeli,
  - 13 — Sağdan itibaren üçer basamaklı tek mertebeden bölüklerin sayıları toplamından çift mertebedeki bölüklerin sayıları toplamı birbirinden çıkarılır. Kalan 13 veya 13 ün katı olmalı
  - 15 — 3 ve 5 le bölünebilmeli.
  - 18 — 2 ve 9 la bölünebilmeli.
  - 25 — Son iki rakam 00 veya 25, 50, 75 olmalı
  - 50 — Son iki rakam 00 veya 50 olmalı.
  - 125 — Son üç rakamının sayısı 125 veya 125 in katı olmalı.
  - 500 — Son üç rakam 000 veya 500 olmalı

**Sorular :**

1 — Aşağıdaki sayılar, yukarıda bölünebilme kaideleri görülen sayılarından hangilerine bölünürler?

345 ; 267 ; 486 ; 4182 ; 614 ; 2076 ; 552 ; 35430 ;

483000 ; 1818334 ; 56738 ; 759451 ; 853427 ; 839574956

2 — Siz de yukarıda bölünebilme kaidesi verilen sayılarla bölünebilen birer sayı bulunuz.

3 — Bir sayının 24 ; 30 ; 33 ; 35 ; ile bölünebilme şartını söyleyiniz.

4 — Aşağıdaki sayırlarda noktalar yerine hangi sayılar yazmalıdır ki, elde edilen sayı karşılarındaki sayırlara bölünəbilsin?

5.9 ; 9 ile bölünebilsin.

7.6 ; 3 ve 4 ile aynı zamanda bölünebilsin

13.4 ; 3 ile bölünebilsin

**10 Asal sayılar:**

1 ile kendisinden başka böleni bulunmayan sayırlara **asal sayılar** denir. Aşağıda 1 den 100 e kadar olan asal sayıları görüyorsunuz.

1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37;  
41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97;....

Görülüyorki iam sayılar arasında sonsuz sayıda asal sayı vardır.

Bir sayının asal olup olmadığını anlamak için, bu sayının 2 den başlamak üzere sıra ile asal sayırlarla bölündüp bölünmediğine bakılır. Bu sayı, bölüm böldenen küçük çıkışına kadar sıra ile alınan asal sayırlara bölünmezse asal olur. Meselâ: 163 sayısını alalım. Bu sayı 2, 3, 5, 7, 11, 13 ile bölünemez. Bu sayının 13 den büyük asal böleni olamaz. Çünkü bu sayının 13 e bölüm 13 den küçük çıkar. O halde 13 den büyük asal sayırlarla denemege lüzum yoktur. Demek ki 163 sayısı asaldır.

**11 — Bir sayının asal çarpanlarına ayrılması:**

Bir sayıyı asal çarpanlara ayırmak, o sayının hangi asal sayırların çarpımı olduğunu bulmak demektir.

Bir sayıyı asal çarpanlara ayırmak için, bu sayının sıra ile 2 den başlamak üzere asal bölenleri aranır. Bölümün tekrar en küçük asal böleni aranır. Bu şekilde son bölüm 1 çıkışına kadar işleme devam edilir.

Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

**Örnek 1:**

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

**Örnek 2:**

5005	5
1001	11
91	7
13	13
1	

$$240 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$5005 = 5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13$$

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

**Soru:** Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayıriniz.

170, 243, 1215, 616, 539, 1944, 425

**11 — En büyük ortak bölen:**

İki ve daha fazla sayıların her birini tam olarak bölen bir sayıya, bu sayıların ortak böleni denir. Bunların en büyüğüne de en büyük ortak bölen denir. (E. B. O. B.)

İki ve daha fazla sayıların E. B. O. B. nini bulmak için:

a) Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.

b) Hepsinde ortak olanların en küçük üslü olanları alınır, ve bunları birbirile çarpılır,

Bu şekilde elde edilecek sayıdaki çarpanlar, verilen bütün sayıların çarpanları içinde bulunduğuundan her birini ayrı ayrı böler.

**Örnek:** 120, 168, 540 sayılarının E.B.O.B. ini bulunuz.

**Sayıların asal çarpanları**

120	2	168	2	540	2
60	2	84	2	270	2
30	2	42	2	135	3
15	3	21	3	45	3
5	5	7	7	15	3
1		1		5	5
				1	

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \quad 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \quad 540 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

Ortak bölenler 2 ile 3 dür,. Bunlardan üssü en küçük alanlar 2 ve 3 dür.

Suhalde  $E \cdot B \cdot O \cdot B. = 2^3 \cdot 3 = 12$  dir.

**Sorular:**

Aşağıdaki sayıların E.B.O.B. ini bulunuz.

$$1^{\circ}) \quad 16 : 80 \quad 2^{\circ}) \quad 138 : 245$$

$$3^{\circ}) \quad 462 : 168 \quad 4^{\circ}) \quad 30 : 45 : 105$$

$$5^{\circ}) \quad 693 : 252 : 1890 \quad 6^{\circ}) \quad 36 : 90 : 162 : 270$$

**12 — En küçük ortak kat:**

İki ve daha fazla sayıların ortak katlarının en küçüğüne, bu sayıların en küçük ortak katı denir. (E.K.O.K.). İki ve daha fazla sayıların E.K.O.K. ni bulmak için:

- a) Sayılar asal çarpanlarına ayrılır.  
 b) Bu çarpanlardan ortak olanların en büyük üslüleri ile ortak olmayanların hepsi çarpılır.

Bulunan bu sayıdaki çarpanlar, verilen sayıların bütün çarpanlarını ihtiva ettiği için her birine ayrı bölünebilir.

**Örnek:** 24, 60, 90 sayılarının E.K.O.K. ini bulunuz.

Asal çarpanları,

24	2	60	2	90	2
12	2	30	2	45	3
6	2	15	3	15	3
3	3	5	5	5	5
1		1		1	

$$24 = 2^3 \cdot 3 \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{E.K.O.K.} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 \text{ olur}$$

**Not:** E.K.O.K. i daha kolay bulmak için sayıları bir hizaya yazarak önüne bir çizgi çizeriz. 2 den başlayarak bütün sayıları asal sayılarla böleriz. Örneği inceleyiniz.

24	60	90	2
12	30	45	2
6	15	45	2
3	15	45	3
1	5	15	3
1	5	5	5
1	1	1	

**Sorular:**

Aşağıdaki sayıların E.K.O.K. larını bulunuz

$$1^{\circ}) 42 ; 63 ; 70$$

$$2^{\circ}) 32 ; 40 ; 25$$

$$3^{\circ}) 84 ; 35 ; 28$$

$$4^{\circ}) 44 ; 28 ; 175 ; 15$$

$$5^{\circ}) 72 ; 135 ; 216 ; 648$$

$$6^{\circ}) 148 ; 335 ; 4862$$

## D — Kesirler ve dört işlemi

### 1) Bayağı kesirler:

Ölçülen kıymetlerin ihtiva ettiği birim miktarları daima tam olarak bulunmaz. Meselâ, bir duvarın boyu üç metreden fazla ve dört metreden eksik gelebilir.

Birden küçük olan kemiyetleri ölçmek için, birimi eşit birkaç parçaya ayırt etmek suretiyle daha küçük birimler kullanılır. Birimin bu eşit parçalarından her birine veya birkaçına kesir denir.

$\frac{3}{5}$  simbolü bir tamın (5) eşit parçaya bölündüğünü içinden (3) tanesini alındığını gösterir.

Kesri bileşik kesirdir. (Payı paydasından büyük, yani tamdan büyük).

$\frac{3}{8}$  kesri basit kesirdir. (Payı paydasından küçük, yani tamdan küçük)

$3\frac{1}{4}$  kesri tam sayılı kesirdir.

a) Bileşik bir kesrin tam sayısını çıkarmak için: Kesrin payı payda sına bölünür. Bölüm kesrin tam kısmı olur, kalan aynı paydaya pay olarak yazılır:

**Örnek :**

$$\frac{25}{5} \rightarrow \frac{25}{24} \frac{1}{4} \rightarrow 4\frac{1}{6}$$

olur.

b) Tam sayılı bir kesrin tamını kesre katmak için:

Tam sayıyı kesrin paydasıyla çarpar paydaya ekleriz. Paydayı olduğu gibi yazırız

$$\text{Örnek: } 2\frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 8 + 5}{8} = \frac{21}{8}$$

c) Kesri genişletmek:

Bir kesrin pay ve paydası aynı sayı ile çarpılırsa kesrin değeri değişmez. Buna kesri genişletmek denir.  $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$  olur.

**Örnek:**  $\frac{2}{5}$  kesrinin 3 le genişletilmiş şekli:

$$\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15} \text{ olur.}$$

d) Bir kesri kısaltmak:

Bir kesrin pay ve paydası aynı sayı ile bölündürse kesrin değeri değişmez. Buna kesri kısaltmak denir.

$$\frac{a : m}{b : m} = \frac{a}{b} \text{ olur.}$$

**Örnek:**  $\frac{16}{20}$  kesrinin pay ve paydasını 4 ile bölersék kesir  $\frac{4}{5}$  şekilde kısaltılmış olur.

2) Ondalık kesirler:

Bir birim birbirine eşit olarak on, yüz, bin... gibi kısımlara ayrılacak olsa, bunlardan her biri birimin onda birine, yüzde birine, binde birine... eşit olurlar. Bu şekilde birimin, birbirine göre onar defa küçük kısımlara ayrılmış kesirlerinin bir kaç parçasına ondalık sayı denir.

0,1	Onda bir.
0,01	Yüzde bir.
0,001	Binde bir.

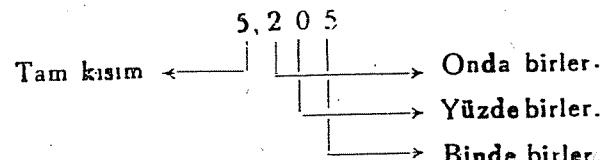
..... ..... Şeklinde yazılır.

0,35 kesri, yüzde otuz beş diye okunur ve birimin 100 parçasından 35 parçاسını gösterir.

3,25, üç tam yüzde yirmi beş diye okunur, ve üç tam ile tamın yüz eşit parçada 25 şini gösterir.

Burada da tam sayılarında olduğu gibi, bulunmayan kesir basamaklarına sıfırlar konur.

5,205 beş tam binde iki yüz beş diye okunur.



Şeklinde düşünürlür

— Kesirlerin dört işlemi:

a — Kesirlerin toplanması:

Kesirleri toplamak için önce paydaları eşitlenir. Bunun için paydaların E.K.O.K.ı bulunur ve kesirler, paydaları bu ortak kat olacak şekilde uygun sayılarla genişletilir.

Paydalari eşit yapılan bu kesirlerin paydalarının toplamı paya yazılır, ortak payda da paydaya yazılır.

Örnek:  $\frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18}$  kesirlerini toplayınız.

Kesirlerin paydaları olan 6; 12; 18 in E.K.O.K.ı

6	12	18	2
3	6	9	2
3	3	9	3
1	1	3	3
			1

$$E.K.O.K = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \text{ olur.}$$

Her kesri, paydası 36 olacak şekilde genişletmek için kesirlerin pay ve paydalarını sırasıyla 6, 3, 2, ile çarpmalıdır.

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{12} + \frac{7}{18} = \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{14}{36} = \frac{6+15+14}{36} = \frac{35}{36} \text{ olur.}$$

b — Kesirlerin çıkarılması:

Bir kesirden diğerini çıkarırken, toplamada olduğu gibi yine kesirlerin paydaları eşitleriz. Payların farkını alarak paya ve ortak paydaya da paydaya yazarız.

Örnek:  $\frac{5}{6} - \frac{7}{18}$

$$O.P. = 18 \text{ olur.}$$

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{18} - \frac{7}{18} = \frac{15}{18} - \frac{7}{18} = \frac{8}{18} \text{ olur.}$$

Not: Toplamada ve çıkarmada tam sayıları, paydası (1) olan bir kesir gibi düşünürüz.

c — Kesirlerin çarpımı:

Kesirleri birbirile çarpmak için, kesirlerin, varsa tam sayıları katılır, sonra payların çarpımı paya ve paydaların çarpımı paydaya yazılır.

Örnek:  $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$

Not

1) Kesirleri çarparken işlemi kolaylaştırmak için, payların herhangi biri ile paydalardan herhangi biri kısalabiliyorsa bu kısalma mutlaka yapılmalıdır.

2) Tam sayı ile bir kesri çarparken, tam sayı kesrin yalnız payı ile çarpılır. Mümkinse kesrin paydası ile kısaltma yapıldıktan sonra çarpılır.

d — Kesirlerin bölümü:

Bir kesri diğer bir kesre bölmek için, varsa kesirlerin tam sayıları katılır ve ikinci kesir tersine çevrilir birinci ile çarpılır.

Örnek:  $\frac{3}{5} : 1 \frac{4}{3} = \frac{3}{5} : \frac{7}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{35}$

**Not:** Bir tam sayıyı kesre bölerken veya kesri bir tam sayıya bölerken, tam sayıyı paydası (1) olan bir kesir gibi düşünürlür.

Sorular:

- 1) Aşağıdaki kesirlerin tam sayılarını çıkarınız

$$\frac{17}{4}, \frac{33}{6}, \frac{19}{4}, \frac{65}{8}, \frac{48}{16}, \frac{29}{6}, \frac{78}{12}$$

- 2) Aşağıdaki kesirlerin tam sayılarını kesre katınız.

$$3\frac{3}{4} \cdot 5\frac{3}{8} \cdot 4\frac{1}{16} \cdot 5\frac{7}{8} \cdot 11\frac{2}{3} \cdot 18\frac{3}{4} \cdot 2\frac{7}{16}$$

- 3) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) \frac{3}{5} + \frac{2}{8} & 2^{\circ}) 1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{7} & 3^{\circ}) \frac{4}{3} + 1\frac{1}{6} \\ 4^{\circ}) \frac{4}{5} - \frac{1}{6} & 5^{\circ}) 1\frac{1}{6} - \frac{3}{8} & 6^{\circ}) \frac{3}{7} - 2\frac{1}{4} \\ 7^{\circ}) \frac{6}{5} + \frac{1}{3} - \frac{7}{12} & 8^{\circ}) 1\frac{1}{5} + \frac{10}{7} - \frac{2}{5} & 9^{\circ}) \frac{10}{15} + 1\frac{1}{8} - \frac{7}{8} \end{array}$$

- 4) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} & 2^{\circ}) \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} & 3^{\circ}) 1\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \\ 4^{\circ}) \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} & 5^{\circ}) 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4} \cdot 2 & 6^{\circ}) 3 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{3} \end{array}$$

- 5) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) \frac{2}{5} : \frac{3}{6} & 2^{\circ}) 1\frac{1}{3} : \frac{6}{7} & 3^{\circ}) 2\frac{3}{5} : 1\frac{1}{7} \\ 4^{\circ}) 8\frac{3}{9} : 4\frac{1}{6} & 5^{\circ}) 9\frac{3}{5} : 1\frac{7}{9} & 6^{\circ}) \frac{5}{3} : 3 \end{array}$$

## BÖLÜM II

### Cebirsel sayı anlamı, cebirsel sayıların dört temel işlemi

#### A — Pozitif ve Negatif sayıları:

1 — Termometrelerde sıfırın altında bulunan sayıları, alış verişte borçları, milattan önceki zamanı, deniz seviyesinden aşağı olan derinlikleri göstermek için *negatif* sayılar kullanılır.

Şimdiye kadar aritmetikte kullandığımız sayılar da *pozitif* sayılardır. Sıfır kabul ettiğimiz bir başlangıç noktasının, bir yanında kalan sayılarla pozitif sayılar, diğer yanında kalanlara *negatif* sayılar denir.

Negatif ve pozitif sayıların hepsine hirden *cibir sayıları* (İzafî sayılar) denir. Pozitif kabul edilen sayıların önüne (soluna) +, negatif kabul edilen sayıların önüne (soluna) da (−) işaretî konur. ve

(+6) Artı 6; (−12) eksî 12 diye okunur.

Bir cebir sayısının öndeki işaret kaldırılıncı bu sayının mutlak değeri elde edilir. +5, −5 sayılarının mutlak değeri 5 sayısıdır. Böyle işaretsiz sayılar aritmetik sayılardır

$$+5 \text{ in mutlak değeri } |+5| = 5$$

$$-5 \rightarrow \rightarrow \rightarrow | -5 | = 5 \text{ şeklinde gösterilir.}$$

2 — Şekilde gördüğünüz doğrunun bir yerine

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} - & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & +1 & +2 & +3 & +4 & + \\ \hline & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} & \overbrace{\phantom{-}} \end{array} \rightarrow$$

0 başlangıç noktası konmuştur ve sağında pozitif sayılar, solunda negatif sayılar gösterilmiştir

Bu şekilde hem pozitif hem negatif sayıların (Cebir sayılarının) gösterildiği yönlü bir doğuya sayı ekseni denir.

Yukarıdaki sayı ekseni üzerinde inceleme yaparak aşağıdaki sonuçları açıklayınız

- 1)  $+5 > +2$  (İki pozitif sayıdan mutlak değeri büyük olan daha büyüktür).
- 2)  $+5 > -3$  (Pozitif sayılar negatif sayılarından daha büyüktür.)
- 3)  $-3 > -6$  (İki negatif sayıdan mutlak değeri küçük olan daha büyüktür).
- 4)  $+4 > 0$  (Pozitif sayılar sıfırdan büyükler)
- 5)  $-4 < 0$  (Negatif sayılar sıfırdan küçüktür.)

### Sorular :

Aşağıdaki sayıları küçük/lük sırasına göre birer sayı eksen üzerinde gösteriniz.

$$\begin{aligned} -3 &; -5; +6; -1; 0; +2; +7 \\ 2 &; -9; -3; 4; -7; -1 \end{aligned}$$

(Önune işareti konmamış sayıyı pozitif olarak alınınız.)

Bir sayının eksen üzerindeki yerine kadar çok sağda ise o sayı o kadar büyük, me kadar çok solda ise o kadar küçüktür.

Sıfır (0) pozitif sayılardan küçük, negatif sayılardan büyuktur.

**Not:** 1) Mutlak değerleri eşit ve işaretleri aynı olan sayılar eşit sayılar denir.

$$+5 = +\frac{10}{2}; \quad -3,5 = \left(-\frac{7}{2}\right) \quad \text{gibi.}$$

2) Mutlak değerleri eşit, işaretleri ters olan sayılar simetrik sayılar denir.

$$\left(+3\right) \text{ ve } \left(-3\right); \quad \left(+\frac{1}{2}\right) \text{ ve } \left(-\frac{1}{2}\right)$$

gibi sayılar simetrik sayılardır.

3) Mutlak değerleri ters, (pay ve paydaların yeri değişik), işaretleri aynı olan sayılar ters sayılar denir,

$$\left(+\frac{1}{3}\right) \text{ ve } \left(+\frac{3}{1}\right); \quad \left(\frac{2}{7}\right) \text{ ve } \left(+\frac{7}{2}\right)$$

sayıları ters sayılardır.

### B — Cebirsel sayıların dört işlemi:

Aşağıdaki işlemi inceleyiniz.

$$2 - 3 = 2 - 1 - 1 - 1 = 0 - 1$$

a — 1) veya sadece  $(-1)$  re çıkarılması gereken sayı diyoruz

$$5 - 7 = 0 - 2 = -2$$

$$0 - 6 = -6$$

$$0 - 9 = -9 \quad \text{burada da } -2; -6; -7$$

sayıları daha çıkarılması gereken sayılardır.

$-1; -3; -5 \dots$  gibi sayıları; yukarıda görüldüğü gibi küçük sayılarından, daha büyük sayıların çıkarılmasını mümkün kılan sayılardır.

Bu yeni sayılarla (negatif sayılar) eskilerini bir arada ele alarak dört işlemi yeni baştan tarif etmemiz gereklidir. (Bu yeni tarif tamamen eskilerini içine almamalıdır. Aksi halde düzensizlik olur.) Yalnız cebir sayılarının dört işleminde, sayıların önündeki işaretlerle toplama çıkarma işaretini ( $+$ )

(-) işaretlerini birbirine karıştırmamalıdır. Onun içe sayıları işaret beraber parantez içinde yazmalıdır.

$$(-3); (-7); (+2) \quad \text{gibi.}$$

### 1 — Cebirsel sayıların toplamı:

a) İşaretleri aynı olan cebirsel iki sayı toplanırken:

Sayıların mutlak değerleri toplanır ve toplamın önüne ortak işaret konur

#### Örnek :

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) \quad (+3) + (+8) = +11 & 2^{\circ}) \quad (+7) + (+16) = +23 \\ 3^{\circ}) \quad (-5) + (-7) = -12 & 4^{\circ}) \quad (-13) + (-1) = -14 \\ 5^{\circ}) \quad \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(+\frac{1}{5}\right) = +\frac{8}{15} & 6^{\circ}) \quad \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{13}{20} \\ 7^{\circ}) \quad (+0,3) + (+2,5) = +2,8 & 8^{\circ}) \quad (-1,36) + (-0,12) = -1,48 \end{array}$$

Genel olarak:

$$\begin{aligned} (+a) + (+b) &= + (a + b) \\ (-a) + (-b) &= - (a + b) \end{aligned} \quad \text{olur.}$$

b) İşaretleri ters olan iki cebirsel sayı toplanırken :

Mutlak değeri büyük olanın mutlak değeri küçük olanı çıkarılır. Buludan farkın önüne mutlak değeri büyük olanın işaretini konur.

#### Örnek :

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) \quad (+10) + (-3) = +7 & 2^{\circ}) \quad (+4) + (-8) = -4 \\ 3^{\circ}) \quad (-12) + (+2) = -10 & 4^{\circ}) \quad (-12) + (+6) = -6 \\ 5^{\circ}) \quad \left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{12} & 6^{\circ}) \quad \left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right) = +\frac{7}{15} \\ 7^{\circ}) \quad (+2,51) + (-1,16) = +1,35 & 8^{\circ}) \quad (-0,63) + (+6,2) = +5,57 \end{array}$$

**Genel olarak :**

$$a > b \text{ ise } \begin{cases} (+a) + (-b) = + (a - b) \\ (-a) + (+b) = - (a - b) \end{cases}$$

$$a < b \text{ ise } \begin{cases} (+a) + (-b) = - (b - a) \\ (-b) + (+a) = + (b - a) \end{cases}$$

**Not:** 1) Bir cebirsel sayının 0 ile toplamı yine kendisi olur.

$$0 + (+7) = +7, (-3) + 0 = -3$$

2) İki simetrik sayıların toplamı sıfır olur.

$$(-5) + (+5) = 0$$

**Genel olarak :**  $(+a) + (-a) = 0$  olur.

c) Bir çok cebirsel sayılar toplanırken :

Önce birinci ile ikinci toplanır. Sonucla üçüncü toplanır; elde edilenle dördüncü toplanarak sayılar bitinceye kadar devam edilir.

**Örnek :**

$$1) (+7) + (-2) + (-3) + (+4) = (+5) + (-3) + (+4) = (+2) + (+4) = +6$$

$$2) (-3) + (-6) + (+2) + (-8) = -15$$

$$3) \left( +\frac{1}{2} \right) + \left( -\frac{4}{3} \right) + \left( -\frac{8}{5} \right) + \left( +\frac{3}{4} \right) = -\frac{101}{60}$$

$$4) (+0,3) + (-1,5) + (-2,73) + (+7,6) = 3,67$$

**Genel olarak :**

$$a \neq b + c + d = (a + b) + c + d = [(a + b) + c] + d \text{ olur.}$$

Bir çok cebirsel sayıların toplamında çok zaman pozitif sayılar ve negatif sayılar ayrı ayrı toplanır.

**Örnek :**

$$(+13) + (-25) + (+17) + (-15) + (+35) = (+65) + (-40) = +25$$

**Genel olarak :**

$$(-a) + (+b) + (-c) + (+d) = [(+b) + (+d)] + [(-a) + (-c)]$$

Şeklinde olur.

**Not:** 1) Cebirsel sayıların toplamı sıraya bağlı değildir.

$$a + b + c + d = d + b + a + c \text{ gibi.}$$

2) Cebirsel sayıların toplamında bazı terimlerin yerine bunların toplamı konabilir.

$$a + b + c + d = a + (b + c) + d \text{ gibi.}$$

3) Bir sayı ile bir toplamı toplamak için bu sayı ile toplamın bütün terimlerini ardarda toplamalıdır.

$$N + [(+a) + (-b) + (+c)] = N + (+a) + (-b) + (+c) \text{ gibi.}$$

**Sorular:**

1) Aşağıdaki cebirsel sayıları toplayınız.

$$1^{\circ}) +3; -5; -8; +7; -1; +6$$

$$2^{\circ}) -8; -2; +5; -9; +4; -6; -3; +7,$$

$$3^{\circ}) -4,35; +0,3; +2,51; -4,56; +2,11$$

$$4^{\circ}) +\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; +\frac{1}{6}; -\frac{2}{5}$$

$$5^{\circ}) -\frac{2}{3}; +\frac{1}{5}; +1\frac{1}{2}; -1\frac{1}{3}$$

2) Aşağıdaki toplamları yapınız.

$$1^{\circ}) (-3) + (+12) + (-5) + (-2) + (+15)$$

$$2^{\circ}) (-7) + (-2) + (+3) + (+12) + (-7)$$

$$3^{\circ}) (-0,5) + (+2,13) + 4,2 + (-1,51)$$

$$4^{\circ}) \frac{1}{2} + \left( -\frac{1}{5} \right) + \left( -\frac{2}{3} \right) + 1\frac{1}{3}$$

3) Aşağıdaki toplamları yapınız.

$$1^{\circ}) [(-5) + (+1) + (-3)] + [(+2) + (-4)]$$

$$2^{\circ}) (-3) + (+5) + [(+3) + (-12) + (-3)]$$

$$3^{\circ}) (-2 + 4 - 6) + (7 - 3 + 4) + (5 - 3 - 7)$$

$$4^{\circ}) (0,2 - 7,2) + (-2,3 + 4,2) + (-1,2 + 3)$$

$$5^{\circ}) \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) + \left( -5 + \frac{1}{3} \right) + \left[ \left( -\frac{1}{2} \right) + \left( +\frac{1}{3} \right) - 1 \right]$$

4) Aşağıda değerleri verilen  $a; b; c; d$  nin

$$x = a + b + c + d$$

toplamını hesaplayınız.

$$1^{\circ}) a = -3; b = +5; c = -5; d = -20$$

$$2^{\circ}) a = +6; b = -4; c = -8; d = +15$$

$$3^{\circ}) a = 1,22; b = -4,32; c = -6,71; d = -3,63$$

$$4^{\circ}) a = -\frac{1}{5}; b = +\frac{2}{3}; c = -\frac{4}{5}; d = +\frac{2}{5}$$

**2 — Cebirsel sayıların çıkartılması :** $a$  ve  $b$  gibi iki cebirsel sayı verilmiş olsun.Bu iki sayıının farkı diye öyle bir ( $c$ ) sayısına denir ki, bu sayı ( $b$ ) ile toplandığı zaman ( $a$ ) sayısını verir.

$$a - b = ; \text{ ise } b + c = a \text{ olur.}$$

 $c$  sayısını nasıl bulacağımızı anlamak için;

$$a - b \text{ yi}$$

$$a - b = a + (-b)$$

Şeklinde yazabileceğimizi düşünmek kâfidir.

Hakikaten  $a + (-b)$  adedine  $(+b)$  yi eklersek :

$$a + (-b) + (+b)$$

olar. Bu da  $(a)$  ya eşittir. Bundan da anlaşılıyor ki  $(a)$  dan  $(b)$  yi çıkarmak için,  $(a)$  adedi ile  $(+b)$  nin simetriği olan  $(-b)$  yi toplamalıdır. Yani,

$$a - b = c : b + c = a ; a + (-b) = c$$

eşitliklerinin her üçüde aynı fikri ifade ederler : Kaide olarak :

Bir sayıyı diğer bir sayıdan çıkarmak için onun simetriği olan sayıyı eklemelidir.

Örnek :

$$1^{\circ}) (+13) - (+3) = (+13) + (-3) = +10$$

$$2^{\circ}) (-6) - (-4) = (-6) + (+4) = -2$$

$$3^{\circ}) (-15) - (-8) = (+15) + (+8) = +23$$

$$4^{\circ}) (-7) - (+3) = (-7) + (-3) = -10$$

Genel olarak : İşaretleri aynı olan sayılar için ;

$$a > b \text{ ise } \begin{cases} (+a) - (+b) = (+a) + (-b) = + (a - b) \\ (-a) - (-b) = (-a) + (+b) = + (a - b) \end{cases}$$

$$a < b \text{ ise } \begin{cases} (+a) - (+b) = (+a) + (-b) = - (b - a) \\ (-a) - (-b) = (-a) + (+b) = + (b - a) \end{cases}$$

İşaretleri aynı olmayan sayılar için ;

$$\begin{cases} (+a) - (-b) = (+a) + (+b) = + (a + b) \\ (-a) - (+b) = (-a) + (-b) = - (a + b) \end{cases} \text{ olur.}$$

### 3 — Cebirsel toplam

Cebirsel sayılarla yapılan bir sıra toplama ve çıkarma işleminin hep sine birden cebirsel toplam denir.

$$(+2) + (-3) - (+7) - (-4) + (+5) \text{ gibi.}$$

Bunu, çıkanlar yerine simetriklerini ekleyerek

$$(+2) + (-3) + (-7) + (+4) + (+5)$$

Şeklinde, yanı cebirsel sayıların toplamı şeklinde yazabiliriz. Bunu da,

$$2 - 3 - 7 + 4 + 5 = 1$$

Şeklinde gösteririz.

Not: Pratik olarak; bir cebirsel toplamda; arka arkaya gelen iki işaret birbirinin aynı olursa  $(+)$ , aksi olursa  $(-)$  eder.

$$+ (+a) = +a ; - (+a) = -a$$

$$- (-a) = +a ; + (-a) = -a$$

Şeklinde gösteririz.

### Sorular :

Aşağıdaki cebirsel toplamların değerlerini bulunuz.

$$1^{\circ}) (+2) - (-4) - (5) + (+6) - (+7)$$

$$2^{\circ}) (-11) + (-3) - (+4) - (-6) - (-5)$$

$$3^{\circ}) (+12) - (+2) - (-7) - (-3) - (+9)$$

$$4^{\circ}) (-0,1) - (+1,2) - (-1,3) + (-3,8) - (+1,6)$$

$$5^{\circ}) \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$6^{\circ}) (-1) + \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(+1\frac{1}{4}\right) - (-4)$$

### 4 — Parantez kaldırma ve paranteze alma :

Bir cebirsel toplamada bazen bir kaç kemyetin toplamını veya farını içine alan parantezler bulunabilir.

$$3 + (2 + 4 - 3) - (10 - 3) ; 8 + (4 - 1) = (5 - 10) \text{ gibi.}$$

a) Parantezin önünde  $(+)$  işaretli bulunursa, sayıların işaretleri değiştirilmeden parantez kaldırılabilir.

$$a + (b + c - d) = a + b + c - d \text{ gibi.}$$

b) Parantezin önünde  $(-)$  işaretli varsa, parantez içindeki sayıların işaretleri değiştirilir. Ve parantez kaldırılır.

$$a - (b + c - d) = a - b - c + d \text{ gibi.}$$

$a$  ve  $b$  de söylediklerimizin karşıtı olarak; bir cebirsel toplamada bazı terimler, işaretleri aynı kalmak suretiyle  $(+)$  parantezine, işaretlerini değiştirmek suretiyle  $(-)$  parantezine alınabilir.

Not: İşlemlerde  $( )$  şeklinde parantez kullanılır. Parantez kâfi gelmezse, yanı iki ve daha fazla parantez kullanmak icabederse,  $[ ]$  şeklinde köşeli parantez veya  $\{ \}$  şeklinde büyük parantezler de kullanılır.

### Sorular :

1) Aşağıdaki parantezli cebirsel işlemleri yapınız  
(Önce parantez içindeki işlemleri yapınız.)

$$1^{\circ}) 3 - (4 - 6) + (2 - 5)$$

$$2^{\circ}) 16 + (5 - 3) - (4 - 6 + 1)$$

$$3^{\circ}) -(3 - 12 + 7) - (14 - 6 - 7)$$

$$4^{\circ}) 15 - (7 - 3 - 8) - (6 - 3)$$

$$5^{\circ}) -(-12 - 6 + 4) - (3 - 12 - 5)$$

$$6^{\circ}) -(-15 - 2) - (4 - 16 + 2)$$

$$7^{\circ}) -(0,6 - 1,9) + (6,7 - 8,6)$$

$$8^{\circ}) 3,6 - (2,9 - 1,8 - 0,7)$$

$$9^{\circ}) \frac{1}{2} - \left( \frac{2}{2} - \frac{4}{3} \right) - \left( \frac{5}{4} - \frac{2}{3} + 1 \right)$$

$$10^{\circ}) \frac{2}{5} - \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{8} \right) - \left( 2 + \frac{1}{3} \right)$$

2) Aşağıdaki işlemleri yapınız. (Önce içteki, sonra köşeli ve büyük parantez içinde bulunan işlemleri yaklaştırın).

$$1^{\circ}) 3 - [6 - (4 - 5 + 7) + 2]$$

$$2^{\circ}) -[-3 + (4 - 7) - (10 + 2)] - 5$$

$$4^{\circ}) 13 - [5 - (2 - 8 - 12) + 2] + 7$$

$$5^{\circ}) 5 - [-(7 - 6 + 3) - (4 - 12)]$$

$$6^{\circ}) -(10 - 4) - [-(8 - 5 + 1) - 7]$$

$$7^{\circ}) -\frac{1}{2} - \left[ \frac{1}{5} - \left( \frac{2}{3} - \frac{4}{5} \right) - \left( \frac{1}{4} - \frac{6}{5} \right) + 1 \right]$$

$$8^{\circ}) -\left( \frac{2}{5} - \frac{1}{4} \right) - \left[ \left( 3 - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{8} \right) - \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \right]$$

### 5 - Cebirsel sayıların çarpımı:

a) Hergün babanızdan 25 kuruş alsanız, bu günden sonra 4 günde kaç kuruşunuz olur?

Her halde 100 kuruşunuz olacaktır. Aldığınız parayı pozitif, günlerde pozitif kabul ettiğinize göre:

$$(25) \cdot (+4) = (+100) \text{ yazabiliris.}$$

b) Hergün babanızdan 25 kuruş alsanız, 4 gün evvel paranızdan kaç kuruş eksik paranız olurdu?

Herhalde 100 kuruş eksik paranız olacaktı. Aldığınız parayı pozitif geçmiş günleri de negatif kabul edersek:

$$(25) \cdot (-4) = (-100) \text{ yazabiliris.}$$

e) Günde 25 kuruş harcasanız 4 gün içinde kaç kuruş harcamış olursunuz? Herhalde 100 kuruş harcasınız. Harcanan parayı negatif, gelecek günlere de pozitif alırsak;

$$(-25) \cdot (+4) = (-100) \text{ yazabiliris.}$$

d) Günde 25 kuruş sarfettiğinize göre, acaba 4 gün evvel şimdiki paranızdan kaç kuruş daha fazla paranız olurdu? Herhalde 100 kuruş daha fazla paranız olurdu.

Sarfettiniz parayı ve geçmiş günlere negatif alırsak;

$$(-25) \cdot (-4) = (+100) \text{ yazabiliris.}$$

$a, b, c, d$  deki incelemelerden iki cebirsel sayının çarpımı için aşağıdaki kaideler söyleyebiliriz; iki cebirsel sayıyı çarpmak için:

Sayıların mutlak değerleri çarpılır ve çarpıma, çarpanların işaretleri aynı ise  $(+)$ , aksi ise  $(-)$  işaretini verilir.

$$\begin{aligned} (+) \cdot (+) &= (+) \\ (-) \cdot (-) &= (+) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Aynı işaretli cebirsel sayı-} \\ \text{lарın çarpımı pozitif olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+) \cdot (-) &= (-) \\ (-) \cdot (+) &= (-) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Aksi işaretli cebirsel sayı-} \\ \text{lарın çarpımı negatif olur.} \end{aligned}$$

Not: 1) Bir cebirsel sayının (0) ile çarpımı veya (0) ile bir cebirsel sayı ile çarpımı sıfır olur.

$$\begin{aligned} (+a) \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot (+a) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (-a) \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot (-a) &= 0 \end{aligned}$$

2) Bir çarpma işleminde çarpanlar yer değiştirilebilir.  
 $a \cdot b = b \cdot a$  gibi.

3) Bir çok sayıların çarpımında, iki ve daha fazla sayının çarpımı yerine bunları çarpımı olan sayı konabilir

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = a \cdot (b \cdot c) \cdot d \text{ gibi.}$$

4) Bir çok cebirel sayıların çarpımında, çarpanlardan  $(-)$  işaretli olanlarının sayısı çiftse çarpımı  $(+)$  olur. Tekse çarpım  $(-)$  olur.

### Sorular :

1) Aşağıdaki çarpımları yapınız.

$$1^{\circ}) (10) \cdot (-3) \quad 2^{\circ}) (-7) \cdot (+6)$$

$$3^{\circ}) (-5) \cdot (-4) \quad 4^{\circ}) (-8) \cdot (-9)$$

$$5^{\circ}) \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -\frac{4}{5} \right) \quad 6^{\circ}) \left( +1\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -2\frac{1}{4} \right)$$

$$7^{\circ}) \left( +2\frac{1}{5} \right) \cdot \left( -\frac{4}{7} \right) \quad 8^{\circ}) \left( -2\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -6\frac{1}{2} \right)$$

$$9^{\circ}) (-0,63) \cdot (-0,2) \quad 10^{\circ}) (+1,23) \cdot (-6,2)$$

2) Aşağıdaki çarpımları yapınız (Önce ilk iksini çarپınız sonra bu çarpımla üçüncüyü çarپınız.)

$$1^{\circ}) (+3) \cdot (-2) \cdot (-6) \quad 2^{\circ}) (-9) \cdot (-3) \cdot (-7)$$

$$3^{\circ}) (+6) \cdot (-8) \cdot (+12) \quad 4^{\circ}) (-4) \cdot (-3) \cdot (-2)$$

$$5^{\circ}) \left( +\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -\frac{2}{5} \right) \quad 6^{\circ}) \left( +\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -\frac{2}{4} \right) \cdot \left( +1\frac{1}{2} \right)$$

$$7^{\circ}) \left( -2\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -\frac{2}{5} \right) \cdot \left( -1\frac{1}{4} \right) \quad 8^{\circ}) (+3) \cdot \left( -2\frac{1}{5} \right) \cdot \left( -5\frac{1}{7} \right)$$

$$9^{\circ}) (-0,3) \cdot (-2,5) \cdot (+1,9) \quad 10^{\circ}) (-1,3) \cdot (-7,63) \cdot (-2,12)$$

$$\begin{aligned} (-a) (-b) (-c) &= (-abc) \\ (-a) (-b) (-c) (-d) &= (+abcd) \text{ gibi} \end{aligned}$$

## 6 — Cebirsel sayıların bölümü:

$\frac{+24}{+6}$  bölümünde bölümün ne olacağını düşününüz?

Bölmein sağlamasında, bölenle bölümün çarptığımız zaman böleni elde edeceğimize göre:  $(+6)$  sayısını  $\underline{\text{ne}}$  ile çarparsak  $(+24)$  sayısını elde ederiz?

$$(+6) \cdot ? = +24 \quad \text{Buradan } \frac{+24}{+6} = (+4) \text{ sonucu elde edilir.}$$

Aynı şekilde :

$$(-6) \cdot (-4) = +24 \quad \text{den } \frac{+24}{-6} = (-4)$$

$$(+6) \cdot (-4) = -24 \quad \text{den } \frac{-24}{+6} = (-4)$$

$$(-6) \cdot (+4) = -24 \quad \text{den } \frac{-24}{-6} = (+4)$$

sonuçları elde edilir. Şu halde,

İki cebirsel sayıyı bölmek için : Sayıların mutlak değerleri bölünüür, bölünen ve bölenin işaretleri aynı ise bölümde  $(+)$ , aksi ise  $(-)$  işaretleri verilir

$(+) : (+) = (+)$  } aynı işaretli cebirsel sayıların

$(-) : (-) = (+)$  } bölümü pozitif olur.

$(+) : (-) = (-)$  } Aksi işaretli cebirsel sayıların

$(-) : (+) = (-)$  } bölümü negatif olur.

Not . 1) Sıfırı bir sayı ile bölerseniz bölüm sıfır olur

$$\frac{0}{a} = 0$$

2) Bir sayının 0 ile bölümü düşünülemez. Çünkü ; düşünülecek bölümün bölenle (yani sıfır'la) çarpımı sıfır eder ki, bu da sıfır'dan farklı olarak alınan bölünenin eşit olamaz.

## Sorular :

1) Aşağıdaki bölmeleri yapınız.

$$\begin{array}{lll} 1^o) \frac{+36}{+9} & 2^o) \frac{-16}{-4} & 3^o) \frac{-27}{+3} \\ 4^o) \frac{-100}{-16} & 5^o) \frac{-75}{+15} & 6^o) \frac{-85}{-25} \end{array}$$

2) Aşağıdaki bölmeleri yapınız. (Önce ilk iki sayıyı bölnüz ; sonucu üçüncü sayıya bölnüz.)

$$1^o) (+2) : (-5) \quad 2^o) (-4) : (-16)$$

$$3^o) (-2) : (-6) : (-8) \quad 4^o) (-6) : (+2) : (+3)$$

$$5^o) (-120) : (-6) : (-4) \quad 6^o) (+175) : (-5) : (-15)$$

## 7 — Cebirsel bir sayının kuvveti :

Bir  $a$  sayısının  $m$ inci kuvveti,  $a$  sayısının  $m$  defa çarçımına eşittir.  $a^m$  şeklinde yazılır.

$$a \cdot a = a^2 \quad (a \text{ üssü 2 veya } a \text{ nin karesi})$$

$$a \cdot a \cdot a = a^3 \quad (a \text{ üssü 3 veya } a \text{ nin kübü})$$

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \quad (a \text{ üssü dört})$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdots a}_m = a^m \quad (a \text{ üssü } m)$$

Not:  $a^1 = a$  şeklinde yazılır.

a) Pozitif bir sayının bütün kuvvetleri pozitif olur.

$$(+2)^5 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = (+32) \quad \text{gibi.}$$

Genel olarak :  $(+a)^n = +a^n$

b) Negatif sayının çift kuvveti pozitif, tek kuvveti negatiftir.

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = (+81)$$

$$(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = (-64) \quad \text{gibi.}$$

Genel olarak :  $(-a)^{2n} = +a^{2n}$  ;  $(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$  dir.

c) Bir çarpımın bir kuvveti, çarpamların her birinin bu kuvvetleri çarpımına eşittir.

$$(3 \cdot 5 \cdot 2)^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2$$

$$(5 \cdot 6 \cdot 3)^5 = 5^5 \cdot 6^5 \cdot 3^5 \quad \text{gibi.}$$

Genel olarak :  $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$  dir

d) Bir bölümün kuvveti, bölünen ve bölenin bu kuvvetlerinin bölümüne eşittir.

$$\left( \frac{+3}{+5} \right)^3 = \frac{(+3)^3}{(+5)^3} = \frac{27}{125}$$

$$\left( \frac{-2}{+3} \right)^4 = \frac{(-2)^4}{(+3)^4} = \frac{+2^4}{+3^4} = \frac{16}{81} \quad \text{gibi.}$$

Genel olarak :  $\left( \frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$  dir.

e) Aynı bir sayının muhtelif kuvvetlerinin çarpımı, bu sayının kuvvetleri toplamının kuvvetine eşittir.

$$(+3)^2 \cdot (+3)^5 = (+3)^{2+5} = (+3)^7$$

$$(-2)^3 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^2 = (-2)^{3+4+2} = (-2)^9$$

Genel olarak :  $a^m \cdot a^n \cdot a^k = a^{m+n+k}$

f) Aynı sayının muhtelif kuvvetleri bölümü, bu sayının bölünen ile bölenin kuvvetleri farklı kadar kuvvetine eşittir.

$$\frac{(+5)^4}{(+5)^2} = (+5)^{4-2} = (+5)^2$$

$$\frac{(-3)^5}{(-3)^3} = (-3)^{5-3} = (-3)^2 \quad \text{gibi.}$$

Genel olarak :  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$   $m$  sayısı  $n$  den büyük olmalıdır.

g) Üslü bir sayının herhangi bir kuvvetini alırken, üsler çarpılır; o sayıya üs verilir.

$$[(+3)^3]^3 = (+3)^{3 \cdot 3} = (+3)^6 \quad \text{gibi.}$$

$$[(-2)^4]^3 = (-2)^{4 \cdot 3} = (-2)^{12}$$

Genel olarak :  $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$  dir.

### Sorular :

1) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$1^{\circ}) (+3)^2 \quad 2^{\circ}) (-5)^3 \quad 3^{\circ}) (-4)^4$$

$$4^{\circ}) (-2)^5 \quad 5^{\circ}) (-1)^6 \quad 6^{\circ}) (-2)^7$$

$$7^{\circ}) (+3)^5 \quad 8^{\circ}) (-1)^{10}$$

2) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$1^{\circ}) \left(\frac{+3}{-2}\right)^4 \quad 2^{\circ}) \frac{(-6)}{(+4)^2} \quad 3^{\circ}) \left(\frac{-5}{+3}\right)^3$$

$$4^{\circ}) \left(\frac{-5}{+3}\right)^5 \quad 5^{\circ}) \left(\frac{+2}{-4}\right) \quad 6^{\circ}) (-0,3)^5$$

$$7^{\circ}) [(-2)^3]^4 \quad 8^{\circ}) [(-3)^2]^2 \quad 9^{\circ}) [(-5)^3 \cdot (-4)^4]^3$$

### 8 — Cebirsel kesir :

İki cebirsel sayıyı  $a$  ve  $b$  ile gösterelim.  $b$  sıfırdan farklı olmak şartıyla  $\frac{a}{b}$  ye cebirsel kesir denir.

$$\frac{-3}{+5}; \quad \frac{-5}{-3}; \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{x+y}{a}$$

kesirleri birer cebirsel kesirdir. (Kesrin paydasındaki kıymetin sıfırdan farklı olmasına dikkat etmelidir.)

Bir cebirsel kesrin pay ve paydasının işaretini aynı ise kesrin işaretini pozitif, aksi ise negatif dir.

$$\frac{+a}{+b} = \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}; \quad \frac{+a}{-b} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$

Cebirsel kesirler de, aritmetikte gördüğümüz bütün kesirlerin özelliklerini taşır.

Meselâ: Bir cebirsel kesrin pay ve paydasını aynı sayı ile çarparsa veya bölersek kesrin değeri değişmez.

İste bu özellikten faydalananak, cebirsel kesrin değerini bozmadan, pay ve paydasının işaretlerini değiştirebiliriz. Bunun için kesrin pay ve paydasını  $(-1)$  ile çarpmak kâfidir.

$$\text{Örnek 1)} \quad \frac{-5}{+3} = \frac{(-5)(-1)}{(+5)(-1)} = \frac{+5}{-3}$$

$$2) \quad \frac{-3}{-7} = \frac{(-3)(-1)}{(-7)(-1)} = \frac{+3}{+7}$$

Netice: Bir cebirsel kesrin pay ve paydasının işaretini değiştirilirse kesrin değeri değişmez.

Not: Bir cebirsel kesrin işaretini aşağıdaki değişik şekillerde yapışabilir.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Cebirsel kesirlerin dört işlemi aritmetik kesirlerde gördüğümüz gibi dir. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz:

$$\text{Örnek 1: } \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right)} - \frac{\frac{2}{3}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)}$$

İşlemizi yapınız.

$$\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right)\left(\frac{8}{12} - \frac{9}{12}\right)} - \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{17}{12}\right)\left(-\frac{1}{12}\right)} - \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)} &= \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{17}{144}} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}} \\ = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{144}{17}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} &= -\frac{432}{34} - \frac{8}{9} = -\frac{4160}{306} = -\frac{2080}{153} \end{aligned}$$

**Örnek 2:**

$$\begin{aligned} \frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{2}{3} \cdot 5} - \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + 1}{3 - \frac{1}{2}} &= \\ \frac{\frac{12}{5} - 2}{\frac{12}{5} - 2} &= \end{aligned}$$

İşlemimi yapınız

$$\begin{aligned} \frac{\frac{5}{2} - 1}{\frac{10}{3}} - \frac{\frac{3}{10} + 1}{\frac{5}{2}} &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{10}{3}} - \frac{\frac{13}{10}}{\frac{5}{2}} \\ \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{9}{20} - \frac{26}{50} &= \frac{45 - 52}{100} = \frac{-7}{100} = -\frac{35}{200} = -\frac{7}{40} \end{aligned}$$

**Örnek 3:**  $\frac{(-2)^2}{\left(3 - \frac{1}{2}\right)\left(3 + \frac{1}{3}\right)} \left[ \frac{1}{5\left(2 - \frac{1}{2}\right)} + \frac{(-2)^2}{7\left(2 + \frac{1}{3}\right)} \right]$

İşlemimi yapınız

$$\frac{4}{\frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3}} \left[ \frac{1}{5 \cdot \frac{3}{2}} + \frac{4}{7 \cdot \frac{7}{3}} \right] = \frac{4}{50} \left[ \frac{1}{15} + \frac{4}{49} \right] =$$

$$\frac{24}{50} \left( \frac{2}{15} + \frac{12}{49} \right) = \frac{12}{25} \left( \frac{98}{735} + \frac{180}{735} \right) = \frac{12}{25} \cdot \frac{278}{735} = \frac{3336}{18375} = \frac{1112}{6125}$$

**Örnek 4:**  $\frac{(+3)(-2) - (-3)}{-2 + (-3) + \frac{-2 - (-3)}{1 + \frac{-2 + (-3)}{}}}$

İşlemimi yapınız.

$$\frac{(-6) - (-3)}{-2 - 3 + \frac{-2 + 3}{1 + \frac{-2 - 3}{}}} = \frac{-6 + 3}{-5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{-5}}} =$$

$$\frac{\frac{-3}{-5 + \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}}}{\frac{-3}{-5 + \frac{1}{4}}} = \frac{-3}{-5 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{-5 + \frac{5}{4}} = \frac{-3}{-\frac{15}{4}} = \frac{12}{15}$$

Sorular:

(Cebirsel sayıların ve kesirlerin dört işlemi üzerine)

1) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$1^{\circ}) \left( -1 \frac{1}{2} \right) + (+5) + \left( +8 \frac{1}{2} \right) - \left( 2 \frac{1}{3} \right) = \left( -\frac{1}{4} \right)$$

$$2^{\circ}) \left( +5 \frac{1}{5} \right) - \left( +2 \frac{3}{4} \right) - \left( 4 \frac{1}{3} \right) - \left( -2 \frac{1}{3} \right) - (-3)$$

$$3^{\circ}) \left( -3 \frac{1}{3} \right) - \left( -5 \frac{1}{2} \right) + (-2) - \left( -6 \frac{1}{3} \right) + \left( -1 \frac{1}{6} \right)$$

$$4^{\circ}) (-3) \cdot (+8) + (-2) \cdot (-4) - (+3) \cdot (+7) - (-5) \cdot (+2)$$

$$5^{\circ}) (-3) \cdot (+8) \cdot (-2) - (4) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-4) \cdot (-3)$$

$$6^{\circ}) \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{4} \right) - \left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \left( -\frac{7}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} \right) \cdot \left( -3 \frac{1}{2} \right)$$

$$7^{\circ}) \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{3}{4} \right) \cdot \left( \frac{8}{5} \right) - (-4) \cdot (-3) \cdot \left( -2 \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{1}{3} \right)$$

$$8^{\circ}) \left( +\frac{5}{4} \right) \left( -3 + \frac{1}{2} - 4 \frac{1}{3} \right) - \left( -\frac{3}{5} \right) \left( -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 \right)$$

$$9^{\circ}) \left( -3 + \frac{1}{3} \right) \cdot \left( -4 - 2 \frac{1}{3} \right) - \left( 3 \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \left( 4 - 2 \frac{1}{3} \right)$$

$$10^{\circ}) (-2)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( 2 \frac{1}{3} \right) - (-2)^2 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^3 + 4 \frac{1}{2}$$

$$11^{\circ}) (-1)^2 \cdot (-2)^3 + \left( -1 \frac{1}{2} \right) \cdot \left( -\frac{2}{3} \right)^3 - \left( 6 \frac{1}{2} \right) \cdot \left( 2 \frac{1}{3} \right)$$

$$12^{\circ}) (-2)^2 \cdot (-5)^3 \cdot (-1)^6 - \left( 2 \frac{1}{3} \right) \left( -1 \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left( -\frac{1}{5} \right)$$

2) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

$$1^{\circ}) \frac{3 \frac{1}{2} - 2}{3} + \frac{1 \frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{4} - 1 \frac{1}{2} - 2^{\circ}) \frac{\left( -\frac{1}{3} \right) \cdot \frac{2}{3}}{2 - \frac{1}{4}} - \left( 1 \frac{1}{3} \right)$$

$$3^{\circ}) \frac{2 - \left(-\frac{5}{3}\right)}{(-2) - \left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{2 \frac{1}{2} - 3} + \frac{2 \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{2}}$$

$$4^{\circ}) \left(\frac{1}{3} - 2 \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2 \frac{1}{2} - \frac{3}{5}}\right) - \frac{1}{2}$$

$$5^{\circ}) \frac{\left(\frac{1}{4} - 2 \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)}{2} - \frac{1}{3}$$

$$6^{\circ}) \frac{2}{\left(3 \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)} - \frac{1}{\frac{1}{3} - 3 \frac{1}{4}}$$

$$7^{\circ}) \frac{3 \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{5} - 1 \frac{1}{3}\right)}{4 \frac{1}{2} - 1 \frac{1}{3}} - \frac{2 \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$8^{\circ}) \frac{(-2)^3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \frac{1}{3}} - \frac{4 - \left(\frac{2}{3} - 1\right)}{(-1)^3 - \left(\frac{5}{4} - 1\right)}$$

3) Aşağıdaki işlemleri yapınız,

$$1^{\circ}) \frac{(-5) + (-2) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)}{-4 \frac{1}{2} - \frac{5}{3} - \frac{1}{4}}$$

$$2^{\circ}) \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}$$

$$3^{\circ}) \frac{1 \frac{1}{3} - \frac{2 \frac{1}{3} - \left(4 \frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-2 \frac{1}{3}\right)}}{4 \frac{1}{2}} - \frac{3}{5}$$

$$4^{\circ}) \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}$$

$$5^{\circ}) \left( \frac{2 + \frac{1}{5}}{2 - \frac{3}{4}} \right) : \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{2}{4 - \frac{3}{5}}} \right)$$

$$6^{\circ}) \left( \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{3}{5} - 1 \frac{1}{2}} - \frac{2 \frac{1}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{4}{5}} + 1 \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1 \frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{2} - \frac{1 \frac{1}{3} + 4 \frac{1}{2}}{1 \frac{1}{3}} + 1 \right)$$

### BÖLÜM: III

#### Cebirsel ifade anlamı ve

Tam cebirsel ifadelerin dört işlemi

##### A — Tarif:

1 — (+) artı, (—) eksı, (×) çarpma, (÷) bölme, ( $\sqrt{\phantom{x}}$ ) kök gibi cebirsel işaretlerle birbirine bağlı olan sayı ve harflerden meydana gelen topluluğa cebirsel ifadeler denir.

$$2a ; 3x - 5 ; x^2 - 7 ; 2a + \frac{5b}{2} ; \sqrt{a^2 - 1}$$

cebirsel ifadelerdir.

##### 2 — Cebirsel ifadelerin çeşitleri:

a) İfadedenki harflerin hiçbir kök altında değilse rasyonel ifade, kök altında olanları varsa irrasyonel ifade denir.

$$2x^2 - 5 : \frac{5x - 1}{4x} \dots \text{rasyonel ifadeler.}$$

$$\sqrt{x - 5} : \sqrt{a - 3x} \dots \text{irasyonel ifadelerdir.}$$

b) Bir cebirsel ifadede harfli payda yoksa bu ifade tam, harfli payda varsa bu ifade kesirli ifade olur.

$$3a - 5 : 3x - \sqrt{x} + 2 \dots \text{cebirsel tam ifadelerdir.}$$

$$\frac{2x - 5}{3 - x} : \frac{2}{x - 1} ; \frac{1}{x} + 4 \dots \text{Cebirsel kesirli ifadelerdir.}$$

c) Bir cebirsel ifadede; parantaz, bölüm ve kök işaretlerine bağlı olmayan + ve — işaretleri ile ayrılmış olan kısımlardan her birine terim denir.

(\*) Cebirin tarifi ve gayesi: Cebirin amacı, aritmetikte kemyetler üzerinde düşünülen soruların çözümlerinde elde edilen sonuçları umumileştirmek ve hesap işlemlerini basitleştirmektir. Aritmetikte, verilen bir problemden, muhakeme yardımıyla düşünülen ve uygun işlemlerle aranılan çözüme varılır. Fakat farklı nümerik değerlerle aynı problem çözümlemek istenirse, tamamıyla yeniden muhakeme etmek icabeder. İşte, cebirde verilen ve aranılan kemyetler yerine harfler konur ve muhakeme yardımıyla uygun işaretler kullanmak suretiyle bu harfler üzerinde gerekli işlemler yapılır. Böylece bilinmiyen kıymeti elde etmeye yarar işlemleri gösteren ve formül adı verilen ifadelere ulaşılır. Bu tarzın başlıca faydası basit bir formül sayesinde bütün benzer problemleri çözebilmektir. Negatif sayıların kabulu ile de bulacağımız formülleri daha umumi şekilde ifade etmiş olacağız. Cebir işlemlerinde genel olarak belirli olan veya verilen sayılar alfabetin a, b, ... ilk harfleriyle, aranılan veya bilinmeyen sayılar ise x, y, z... gibi son harfleriyle gösterilir.

$$\text{Meselâ : } 2x - \frac{3x-1}{x-3} + \sqrt{x+2}$$

İfadeleri üç terimlidir.

$$2x \quad - \frac{3x-1}{x-3} \quad + \sqrt{x+2}$$

1. terim      2. terim      3. Terim

Bunun gibi :

$$(2x-5)^2 - 4x \quad \text{İfadeleri 2 terimli.}$$

$$3x - 6ab - \frac{4}{3} \quad \text{İfadeleri 3 terimli.}$$

$$\sqrt{x^2 + 5 + 3} \rightarrow 1 \rightarrow \text{İfadelerdir.}$$

İfadeler terim sayılarına göre,

Tek terimli ifadeler, iki terimli ifadeler, çok terimli ifadeler şeklinde adlandırılır.

3 — (Kat sayı) : Bir cebirsel ifadenin terimlerinde, çarpan olarak bulunan sayılar terimin katsayıları denir.

$-3xy^2$  ifadesinde  $-3$ , terimin katsayısidır. Bunun gibi ;

$$2x^3 - 4x + \frac{3}{5}y \quad \text{Üç terimli ifadesinde, terimlerin katsayıları}$$

$$2; -4; \frac{3}{5} \quad \text{dir.}$$

(Katsayılar harfli de olabilir. Meselâ  $2ax$  teriminde  $2a$ ;  $x$  in katsayısı  $a$  dir.  $x^2$  nin katsayısı 1 dir.  $1x^2$  şeklinde yazılmaz.  $-x$  nin katsayıısı  $-1$  dir.  $x = x^1 = \frac{x}{1} = +x^1 = +1 \times x = x \times 1$  olduğunu hatırlayınız.)

4 — (Benzer terimler) :

Birbirinden farklı olmayan veya yalnız katsayıları farklı olan terimlere benzer terimler denir.

$3a$  ile  $5a$ ,  $3x^2y$  ile  $5x^2y$ ;  $3a^3b^2$  ile  $-5a^3b^3$  terimleri benzer terimlerdir.

5 — (Derece) : a) Tek terimlinin derecesi : Ya içinde bulunan harflerin herbiriinin üssüne göre olur.

Meselâ :  $2x^2yz^3$  gibi bir ifade ;

$x$  e göre 2 nci

$y$  e       $\rightarrow$  1 nci

$z$  e       $\rightarrow$  3 nci derecedendir.

Veya, bu terimin bir kısım harflerine göre derecelendirilir. Bu takdirde o tek terimlinin bütün harflerinin üsleri toplamı derecesini verir.

Yukarıdaki örnekte derece  $2+1+3=6$  olur.

b) Çok terimli bir ifadenin derecesi; en büyük dereceyi içten eden terimin derecesi kadardır. Ancak tasrif edilen harfi esas almak lazımdır.

$2x^3 - 4x + 5$  ifadesinde en büyük dereceli terim, 3 üncü derecedendir.

Şu halde bu ifadenin derecesi 3 tür.  $a^2b + b^3 - ab + 1$  ifadesi  $a$  ya göre 2 nci,  $b$  ye göre 3 üncü derecedendir.

$2xy - 3x^2 + 4ax^3 + 1$  ifadesi,

$4ax^3 - 3x^2 + 2xy + 1$  şeklinde  $x$  e göre düzenlenmiş olur ve 3 üncü derecededir.

6 — (Nümerik değer) : Bir cebirsel ifadede bulunan harfler yerine bu harflere verilecek nümerik değerlerin yerlerine konmasıyle bulunacak netice, bu ifadenin nümerik değeri olur.

Örnek 1)  $4x^2y^3$  ifadesinin  $x = 5$ ;  $y = 3$  için nümerik değerini bulunuz

$$\begin{aligned} 4x^2y^3 &= 4 \times 5^2 \times 3^3 \\ &= 4 \times 25 \times 27 \\ &= 2700 \end{aligned}$$

Örnek 2)  $7ab - c^2$  ifadesinin  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$  için nümerik değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} 7ab - c^2 &= 7 \times 1 \times 2 - 3^2 \\ &= 14 - 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Örnek 3)  $\frac{9b}{c} + 5ab^2 - 7(a^3 + 2b)^2 + 3c^2$  ifadesinin  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$  için nümerik değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} &= \frac{9 \times 2}{3} + 5 \times 1 \times 2^2 - 7(1^3 + 2 \times 2)^2 + 3 \times 3^2 \\ &= 6 + 20 - 175 + 27 \\ &= -122 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 4)  $a = 5$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$  için,

$$a^2 \cdot \frac{a-b}{b+2c} - b^2 \cdot \frac{a-c}{(a+c)^2}$$

İfadelerinin nümerik değerini bulunuz.

$$\begin{aligned} &= 5^2 \times \frac{5-3}{3+(2 \times 1)} - 3^2 \times \frac{5-1}{(5+1)^2} \\ &= 25 \times \frac{2}{5} - 9 \times \frac{4}{36} \\ &= 10 - 1 = 9 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

**Sorular :**

1)  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $d = 0$  için aşağıdaki ifadelerin nümerik değerlerini bulunuz.

1°)  $3a - 4b + 6c + 5d$  (C : 0)

2°)  $6ab - 3cd + 2da - 5cb + 2db$  (C : 21)

3°)  $3bcd + cda - 7dab + abc$  (C : 6)

4°)  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  (C : 14)

5°)  $2a^2 + 3b^3 - 4c^4$  (C : 85)

2)  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $d = 0$  için aşağıdaki ifadelerin nümerik değerlerini bulunuz.

1°)  $\frac{1}{2}bc^3 - a^3 - b^3 - \frac{3}{4}ab^3c$  (C : 0)

2°)  $c^3 + \frac{4}{5}ad^3 - 3a^3 + b^2d$  (C : 24)

3°)  $a^2 + 3b^2 + 2c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + \frac{2}{7}cd$  (C : 43)

4°)  $-\frac{4}{3}ac^2 - 2a + \frac{1}{8}b^4 - 3d + \frac{4}{9}c^3$  (C : 12)

5°)  $2ab - \frac{3}{4}b^3 + 3ac - 2c - d + \frac{4}{15}ad$  (C : 1)

3)  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 3$ ,  $x = 4$ ,  $y = 6$ ,  $z = 0$  için aşağıdaki ifadelerin nümerik değerlerini bulunuz.

1°)  $c^2(y-x) - b^2(c-a)$  (C : 17)

2°)  $(2a-c)(x+2y-z)$  (C : 16)

3°)  $\frac{2}{3}(c^2 - z^2) + \frac{3}{5}(y^2 - x^2)$  (C : 18)

4°)  $\frac{4}{9}(cy - 2c^2) + \frac{3}{7}(xy - bc)$  (C : 9)

5°)  $\frac{(a+y)^2}{(x-z)^3} - \frac{6(c^2 - a)}{7(a^2 + x)}$  (C :  $\frac{1}{4}$ )

6°)  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} - \frac{(a+b+z)^2}{(b+c-z)^2}$  (C :  $\frac{3}{16}$ )

7°)  $\frac{(a+b+c)^2}{c(y-z)} - \frac{4(c-a)^3}{3(a+y)}$  (C :  $1\frac{5}{6}$ )

4)  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $d = 4$ ,  $x = 5$  için aşağıdaki ifadelerin nümerik değerlerini bulunuz.

1°)  $(a+b)(b+c) - (b+c)(c+d) + (c+d)(d+x)$  (C : 43)

2°)  $\frac{4a+3b}{b+c} - \frac{4c+3d}{b+d} + \frac{5d+4x}{a+d+x}$  (C : 2)

3°)  $(a-2b+3c)^2 - (b-2c+3d)^2 + (c-2d+3x)^2$  (C : 72)

4°)  $\frac{a^4 - 4a^3c + 6a^2c^2 - 4ac^3 + c^4}{b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4}$  (C : 16)

5°)  $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a+b} - \frac{b^2 + 2bc + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + 2cd + d^2}{c+d}$  (C : 5)

5)  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{3}$  için  $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$  ifadesinin nümerik değerini bulunuz.  
(C :  $-1\frac{4}{3}$ )

6)  $r = -3$  ve  $x = \frac{1}{2}$  için  $\frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}$  ifadesinin nümerik değerini bulunuz. (1 veya 1)

7)  $r = -2$ ,  $y = 3$  için  $\frac{1}{(x+y)^2} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{2}{(x+y)^2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$  ifadesinin nümerik değerini bulunuz. (C :  $\frac{1}{36}$ )

**B — Cebirsel ifadelerin toplamı:**

1 — Benzer terimler toplarken, katsayılarının cebirsel toplamı terime katsayı olarak verilir.

**Örnek 1)**  $3x$ ,  $5x$ ,  $7x$ , toplanırken,

$$3x + 5x + 7x = (3+5+7)x = 15x \text{ olur.}$$

2)  $2x^3y$ ,  $-5x^2y$ ,  $11x^2y$ ,  $x^2y$  Benzer terimleri toplanırken,

$$2x^3y + (-5x^3y) + 11x^2y + x^2y$$

$$= 2x^3y - 5x^3y + 11x^2y + x^2y$$

$$= 14x^2y - 5x^3y = 9x^2y \text{ bulunur.}$$

**Sorular :**

1) Aşağıdaki benzer terimlerin toplamını yapınız.

1°)  $5x$ ,  $7x$ ,  $11x$ ,  $x$ ,  $2x$  2°)  $2a$ ,  $3a$ ,  $5a$ ,  $8a$

3°)  $-3x$ ,  $-5x$ ,  $-11x$ ,  $-x$  4°)  $-b$ ,  $-2b$ ,  $-4b$ ,  $13b$

5°)  $5x$ ,  $-x$ ,  $-11x$ ,  $-x$  6°)  $7y$ ,  $-11y$ ,  $-46y$ ,  $-3y$ ,  $-2y$

7°)  $7ab$ ,  $-3ab$ ,  $-5ab$ ,  $2ab$ ,  $ab$  8°)  $5xy^2$ ,  $7xy^2$ ,  $-2xy^2$ ,  $7xy^2$ ,  $-5xy^2$

2) Aşağıdaki toplamaları yapınız.

1°)  $3x^2 - 4x^2 + 11x^2 - 9x^2$  2°)  $4xy^2 - 5xy^2 - 8xy^2 - 7xy^2$

3°)  $4a^2b^2 - a^2b^2 - 7a^2b^2 + 5a^2b^2$  4°)  $-9x^3 - 4x^3 - 12x^3 + 13x^3 + 6x^3$

5º)  $7abc - 11abc + 2abc - 40abc$

7º)  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + x + \frac{2}{3}x$

9º)  $-5b + \frac{1}{4}b - \frac{1}{2}b + \frac{7}{4}b$

11º)  $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}x - 2x + x$

6º)  $-x^3y + 6x^3y - 11x^3y + 28x^3y$

8º)  $\frac{3}{2}a + \frac{3}{5}a - \frac{1}{2}a + a$

10º)  $-ab - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{3}ab + \frac{5}{2}ab + ab$

12º)  $-\frac{5}{3}x^2 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - x^2$

2 — Çok terimli ifadeleri toplamak için, bu çok terimlerin benzer terimlerini toplamalıdır.

Örnek 1)  $3a - 5b + 2c ; 2a + 3b - d ; -4a + 2b$  ifadelerini toplayınız.

$$\begin{aligned} &= (3a - 5b + 2c) + (2a + 3b - d) + (-4a + 2b) \\ &= 3a - 5b + 2c + 2a + 3b - d - 4a + 2b \\ &= 3a + 2a - 4a - 5b + 3b + 2b + 2c - d \\ &= a + 2c - d \end{aligned}$$

Örnek 2)  $4x^2 + 3x + 2 ; 3x^2 - 4x - 3 ; -2x^2 - x - 5$

İfadelerini toplayınız.

Benzer terimler alt alta gelmek üzere ifadeleri,

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 3x + 2 \\ 3x^2 - 4x - 3 \\ -2x^2 - x - 5 \\ \hline 5x^2 - 2x - 6 \end{array}$$

şeklinde de toplarız

### Sorular :

1) Aşağıdaki ifadeleri toplayınız ;

1º)  $a - 2b ; 3a + 4b ; a + 5b$

3º)  $3a + 2b - c ; -a + 3b + 2c$

5º)  $2x - 2y$

$\underline{-2x + 3y}$

$\underline{x - y}$

2º)  $3v^2 + y^2 ; 2v^2 - ly^2 ; -4v^2 - 5y^2$

4º)  $v^2 - xy + 3y^2 ; 2v^2 + 2xy - 2y^2$

6º)  $5x^2 + 7$

$\underline{x^2 - 10}$

$\underline{-7x^2 + 1}$

7º)  $a^2 - ax + 4x^2$

$\underline{3a^2 + 2ax - 5x^2}$

$\underline{-a^2 - ax - x}$

8º)  $5ab + bc - 3ca ; ab - bc + ca ; -ab + 2ca + bc$

9º)  $x^2 + y^2 - 2z^2 ; 3x^2 - y^2 + 2z^2 ; z^2 - 2x^2 ; x^2 - z^2$

10º)  $4xy - 9yz + 2z ; -zxy + 24yz - zx ; 23xy - 15yz + zx$

11º)  $\frac{1}{2}x^2 - 2x^3 + \frac{1}{3}x - 3 ; \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} ; 2v - \frac{3}{2}x^2$

12º)  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4} ; \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} ; \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$

2) Aşağıdaki işlemleri yapıniz

1º)  $4a - 5b + 3c - 2b - c + a + 9b + 3a$

2º)  $5a - 8b - 7c - 2a - 9b + 2c - 2a + 2b + 6c$

3º)  $2x - 3y - 5x + 4z + 4y + z - 2y - x - 3z + 2x - 3y$

4º)  $3xy - 5ax + 3xy^2 - 2xy - 3x^2 + 4ax - 2y^2 + 3ax - 2xy$

5º)  $x - 3y + 2z + 2y - 2x - 3x - 4z - 2x + z + 2x$

6º)  $2x - 1 + 5y - 2 + 3x + 2 + 3y - 3 - 2x + 1 - x - 3y$

7º)  ~~$3a^2b - 2a^2c + 3a^2 - 5a^2b - a^2 - 3a^2c + a^2b + 6a^2c - 2a^2$~~

8º)  $\frac{5}{4}x - \frac{7}{2}y + \frac{3}{7}x - \frac{2}{3}y - x$

9º)  $3\frac{1}{2}a - 7b + 3\frac{1}{3}c - 7a + 3\frac{1}{3}b - 5c + 4a - 1\frac{1}{3}b$

10º)  $7\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z + 3\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{3}z - \frac{17}{2}x + \frac{15}{2}y + 2\frac{1}{6}z$

11º)  $\frac{1}{5}a^2b + 3b^2 - 4a^2b + \frac{3}{2}a - a + 2a^2b - b^2$

12º)  $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{4} + xy - y^2 - x^2$

13º)  $7,3a - 3,05b + 1,4b + 6,8c - 9,42c + 18,9a + 1,56b$

14º)  $9,8x - 3\frac{1}{6}x - 0,72y + \frac{3}{5}y - 6\frac{1}{12}x + 0,12y$

### C — Cebirsel ifadelerin çıkarılması:

1 — Toplamada olduğu gibi çıkarmada da benzer terimler birbirinden çıkarılır. İki benzer terimi birbirinden çıkarmak için, çıkışlanan işaretlerini ters çevirip eksilenle toplamalıdır.

#### Örnek

1)  $5a - 3a = 2a$

2)  $3a - 7a = -4a$

3)  $-3a - 6a = -9a$

4)  $3a - (-8a) = 3a + 8a$

5)  $-3a - (-8a) = -3a + 8a$

6)

$7a$

$\underline{-3a}$

$\underline{4a}$

$8ab$

$\underline{+5ab}$

$\underline{13ab}$

$= 11a$

$= 5a$

**Sorular :**

Aşağıdaki benzer terimleri birbirinden çıkarınız.

1°)  $7ab$  den  $3ab$  yi

3°)  $-3x^2$  den  $-4x^2$  i

5°)  $\frac{12x^2y}{-5x^2y}$

8°)  $\frac{a^2bc^2}{-2a^2bc^2}$

2)  $5x$  den  $9x$  si

4)  $-7xy$  den  $3xy$  i

6°)  $\frac{36abc}{-22abc}$

9°)  $\frac{-x^3y}{-2x^3y}$

7°)  $\frac{-41a^2b^2}{-37a^2b^2}$

10°)  $\frac{0}{-12xy^2}$

2 — İki çok terimliyi birbirinden çıkarmak için, çıkarılan terimlerinin işaretlerini değiştirip eksilenle toplamalıdır.

**Örnek 1)**  $5x^3 - 2x^2 + x - 3$  ifadesinden  $2x^3 - 3x^2 - x + 2$  ifadesini çıkarınız.

$$\begin{array}{r} 5x^3 - 2x^2 + x - 3 \\ - (2x^3 + 3x^2 - x + 2) \\ \hline 3x^3 + x^2 + 2x - 5 \end{array}$$

bulunur.

**Örnek 2)**  $4a - 3b + 5c$  ifadesinden  $3a - 2b - c$  ifadesini çıkarınız.

$$\begin{aligned} &= 4a - 3b + 5c - (3a - 2b - c) \\ &= 4a - 3b + 5c - 3a + 2b + c \\ &= 4a - 3a - 3b + 2b + 5c + c \\ &= a - b + 6c \end{aligned}$$

bulunur.

**Sorular :**

1) Aşağıdaki ifadeleri birbirinden çıkarınız.

1°)  $4a - 3b + c$  den  $2a - 3b - c$  yi

2°)  $a - 3b + 5c$  den  $4a - 8b + c$  yi

3°)  $-16x - 18y - 15z$  den  $-5x + 8y + 7z$  yi

4°)  $\frac{5x^2 - 4x + 3}{-2x^2 - x - 1}$

5°)  $\frac{5x^2 + 4x - 3}{-x^2 - 3x + 5}$

6°)  $ab + cd - ac - bd$  den  $ab + cd + ac + bd$  yi

7°)  $-ab + cd - ac + bd$  den  $ab - cd + ac - bd$  yi

8°)  $2 - x + x^2 + x^4$  den  $3 + x - x^2 - x^3 - 2x^4$  yi

9°)  $1 + x - x^2 + x^3 - x^4$  den  $2 - x - x^2 - x^3 - x^5$  yi

10°)  $a + 2b - 3c + 4d$  den  $m + 2b + d - x + a$  yi

Misal Misal Misal Misal Misal Misal

Misal Misal Misal Misal Misal Misal

2)  $A = x^3 - 3x^2 + 1$ ;  $B = 2x^2 - 5x - 3$ ;  $C = 3x^3 + x^2 + 3x$  olduğuna göre aşağıdaki ifadeleri bulunuz.

1°)  $A + B + C$

3°)  $A + B - C$

3)  $A = 4a^2 - 5ab + 3b^2$

B =  $3a^2 + 2ab + b^2$

C =  $-a^2 + 3ab + 2b^2$

olduğuna göre;

1°)  $A - B - C$ ; 2°)  $B - C - A$ ; 3°)  $C - A - B$  yi hesaplayınız.

4)  $A = x^2 - 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1$ ;  $B = -2x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 2y - 3$

C =  $3x^2 - 4xy + 7y^2 - 6x + 4y + 5$ ; D =  $-x^2 + 5xy - 3y^2 + 4x - 7y - 8$

olduğuna göre, aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız ve dördünün toplamının sıfır olduğunu gösteriniz.

1°)  $A + B - C - D$

3°)  $-A + B + C + D$

2°)  $A - B + C - D$

4°)  $-A - B - C + D$

**C — Parantezli ifadeler:**

Parantezli olarak verilen ifadeleri kısaltırken aşağıdaki esaslara dikkat ediniz.

1) Parantezin önünde (+) işaretli varsa parantezisilebiliriz.

**Örnek:**  $3x + (4x^2 + 3x - 1) + (2x - 1)$

$$\begin{aligned} &= 3x + 4x^2 + 3x - 1 + 2x - 1 \\ &= 4x^2 + 8x - 2 \end{aligned}$$

2) Parantezin önünde (-) işaretli varsa, parantez içindeki her terimin işaretini değiştirip parantezi kaldırabiliriz.

**Örnek:**  $17x - (16x + y) - (y - 4x - z) - (x + z)$

$$\begin{aligned} &= 17x - 16x - y - y + 4x + z - x - z \\ &= 4x - 2y \end{aligned}$$

3) İçinde parantezli ifadeleri kısaltırken, önce içteki parantezleri sonra dıştaki parantezleri kaldırmak uygun olur.

**Örnek 1)**  $12 - [7 - 2a - (1 - 5 + 3a) - 6]$

$$\begin{aligned} &= 12 - [7 - 2a - 1 + 5 - 3a - 6] \\ &= 12 - 7 + 2a + 1 - 5 + 3a + 6 \\ &= 5a + 7 \end{aligned}$$

**Örnek 2)**  $5x - y - \{4x - 6y + [-3x + y + 2z - (2x - z)]\}$

$$\begin{aligned} &= 5x - y - [4x - 6y + (-3x + y + 2z - 2x + z)] \\ &= 5x - y - (4x - 6y - 3x + y + 2z - 2x + z) \\ &= 5x - y - 4x + 6y + 3x - y - 2z + 2x - z \\ &= 6x + 4y - 3z \end{aligned}$$

**Örnek 3)**

$$\begin{aligned}
 & 4a - \{(7a+5b) - [-6b - (2b+a-b)]\} \\
 & = 4a - [7a+5b - (-6b-2b-a+b)] \\
 & = 4a - (7a+5b+6b+2b+a-b) \\
 & = 4a - 7a - 5b - 6b - 2b - a + b \\
 & = -4a - 12b
 \end{aligned}$$

Sorular :

1) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız :

$$\begin{array}{ll}
 1) 3a+(2a-b) & 2) 2x-(x-1) \\
 3) x+(1-2x) & 4) 3x-(1+3x) \\
 5) x-(-x-1) & 6) x+2y-(2x-y) \\
 7) a-(-a-2b+c)+(-a+b) & 8) 2x-(x-y)+(-x+y) \\
 9) (6a+6b)-(5a-4b)+(3a-2b) & \\
 10) (a+b+c)-(a+b-c)-(a-b+c) & \\
 11) a+[b-(a-b)] & 12) a+b-[(b+d)-(a-b)] \\
 13) x-[2x+(x-1)] & 14) 5x+[1-(2-4x)] \\
 15) 2-[1-(3-a)-a] & 16) 2x-[x-(x-1)] \\
 17) 2y+[-x-(2y-x)] & 18) a-[-a-(-a-1)] \\
 19) 1-\{1-[1-(1-x)-1]-1\}-x & \\
 20) x-\{-[-(-x-1)-x]-1\}-1 &
 \end{array}$$

2) Aşağıdaki parantezli ifadeleri kısaltınız.

$$\begin{array}{ll}
 1) [a-(b-c)]+[b-(c-a)]-[c-(a-b)] & (3a-b-c) \\
 2) 2a-[5b+(3c-a)]-[5a-(b+c)] & (-2a-4b-2c) \\
 3) -\{-[-(a-b+c)]\} & (-a+b-c) \\
 4) -\{a-[b-(c-a)]\}-\{b-[c-(a-b)]\} & (b-a) \\
 5) -\{-[-(-x)]\}-[-(-y)] & (x-y) \\
 6) -\{-[-(b+c-a)]\}+\{-[-(c+a-b)]\} & (2a-2b) \\
 7) -[-(-a)]-\{-[-(-x)]\} & (x-a) \\
 8) 3a-\{a+b-[a+b+c-(a+b+c+d)]\} & (2a-b-d) \\
 9) -2a-\{3x+[3c-(4y+3x+2a)]\} & (-3c+4y) \\
 10) -\{15x-[14y-(15z+12y)-(10x-15z)]\} & (-25x+2y)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 11) 8x-\{16y-[3x-(12y-x)-8y]+x\} & (11x-36y) \\
 12) -\{x-[z+(x-z)-(z-x)-z]-x\} & (2x-2z) \\
 13) -\{a+[a-(a-x)-(a+x)-a]\}-a & (2a) \\
 14) -\{a-[a+(x-a)-(x-a)-a]\}-2a & (a) \\
 15) A=4x^3-2x^2y+3xy^2+y^3 & C=3x^3-x^2y+2y^3 \\
 16) B=4x^3-y^2x-xy^2-3y^3 & D=x^3-2xy^2+y^3
 \end{array}$$

olduğunda gerekçe aşağıdaki ifadeleri bulunuz

$$\begin{array}{ll}
 1) A-B+C-D & 2) A-\{B-(D+C)\} \\
 3) A-(B+C)+D & 4) B+\{A-(C-D)\} \\
 5) B-\{-A-[B-(-C)-D]-C\}-(C-B)
 \end{array}$$

### E — Cebirsel ifadelerin çarpımı:

1 — İki tek terimliyi çarparken : önce katsayılarını çarpiniz. Benzer kuvvetler varsa üslüini toplayınız ve birine üs veriniz. Benzer olmayan kuvvetleri de yan yana çarpan olarak veriniz.

**Örnek 1)**  $4a^2b$  ile  $12a^5b^2c$  yi çarpiniz.

$$\begin{aligned}
 4a^2b \times 12a^5b^2c &= 4 \times 12a^{2+5} \cdot b^{1+2} \cdot c \\
 &= 48a^7b^3c
 \end{aligned}$$

Terimleri çarparken cebirk sayılarında olduğu gibi aşağıdaki işaret kaidesine dikkat ediniz.

$$\begin{array}{l}
 (+A)(+B)=+(AB) \\
 (+A)(-B)=- (AB) \\
 (-A)(+B)=- (AB) \\
 (-A)(-B)=+(AB)
 \end{array}$$

**Örnek 2)**  $5a^5bx^3$  ile  $-6ab^3y^2$  i çarpiniz.

$$\begin{aligned}
 (5a^2bx^3)(-6ab^3y^2) &= -30a^{2+1}b^{1+3}x^3y^2 \\
 &= -30a^3b^4x^3y^2
 \end{aligned}$$

**Not :** Genel olarak :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

oldur. Çünkü :

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots}_{m \text{ tane}}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots}_{n \text{ tane}}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ tane}} \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ tane}}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ tane}} = a^{m+n}$$

**Örnek :**  $a^3 \times a^7 = a^{3+7} = a^{10}$   
 $x^3 \times x^2 \times x^4 = x^{3+2+4} = x^9$   
 $y^8 \times y \times y^3 \times y^2 = y^{8+1+3+2} = y^{14}$

**Sorular :**

Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

1°)  $2x^3 \times 4x^2$

2°)  $2a^2b \times 2ab^2$

3°)  $3x^2y^2z \times 5x^4y^3z^2$

4°)  $11cdx^2 \times (-3c^2d)$

5°)  $(-8a^3bc)(11c^2b)$

6°)  $(-3xy)(-5xy^2)$

7°)  $25x^2y^2z^2 \times (-8xyz)$

8°)  $(-6x^2y^2z^2)(-3xyz)$

9°)  $(-4a^4bc) \times 2a^3b^2c$

10°)  $3a^2b^2c^2 \times (-4abc)(-5a^2c^3)$

11°)  $(-2a^5bc)(-2ab^5x) \times 2ab^5x^5$

12°)  $(-3a^3)(-2b^3)(-c)$

13°)  $(-6a^2b)(-4ab)(-3a^3b^3)$

14°)  $a^{n+1} \times a^{n-2} \times a$

15°)  $(-2a^nb^m)(a^nb^m)$

2 — Bir çok terimliyi bir tekterimli ile çarparken: çok terimlinin her terimini tek terimli ile çarpınız. Çarpında yine işaretlerin çarpım kaidesine dikkat ediniz.

$$\begin{aligned} 4(a + 2b) &= (a + 2b) + (a + 2b) + (a + 2b) + (a + 2b) \\ &= 4 \cdot a + 4(2b) \\ &= 4a + 8b \end{aligned}$$

**Örnek 1)**  $-3a^2b$  ile  $6a^2bc + 2bc - 1$  ifadelerini çarpınız.

$$(-3a^2b)(6a^2bc + 2bc - 1) = -18a^4b^2c - 6a^2b^2c + 3a^2b$$

**Örnek 2)**  $(-5x^2y)(6x^2 + 7xy - 3y^2) = -30x^4y - 35x^3y^2 + 15x^2y^3$

**Sorular :**

Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

1°)  $3ax(2a+3)$

2°)  $-5xy(3x-2y)$

3°)  $2xy(4x^2y-xy^2)$

4°)  $(7ax-4by)(-3abxy)$

5°)  $8xy^2(-3x^2y-y^2)$

6°)  $2x^2y(3x^2-4y^2+5)$

7°)  $8a^3b^2c^4(4a^3b^2-5a^2b+7c)$

8°)  $-3xy(x^2-y^2-1)$

9°)  $-4xz(5x^2z-3xz^2+2xz)$

10°)  $4a^2b^2c^2(-\frac{1}{2}a+2abc-c)$

11°)  $-5x^4y(7xyz-5y^2z^2-2z^3)$

12°)  $-5a^2(-5a^2-5a-5)$

13°)  $6xy^2(2x^2-2xy-y^3-1)$

14°)  $\frac{2}{3}a^2(2abc+\frac{3}{2}a^2c+\frac{1}{2}bc)$

15°)  $(-\frac{4}{3}a^2b^2)(\frac{3}{2}a^2b^4-\frac{5}{4}ab^3+3a^2)$

16°)  $\frac{3}{4}x^2y(8x^4-\frac{3}{5}x^3y+\frac{1}{3}xy^3-y^4)$

17°)  $\frac{3}{11}x^3y^4(\frac{1}{5}x^3-\frac{2}{7}x^2y+\frac{3}{8}y^2-\frac{4}{9}y^2)$

3 — İki çokterimliyi çarparken; birinci çokterimlinin her terimin ikinci çokterimlinin bütün terimleri ile ayrı ayrı çarpınız.

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= a(c+d) + b(c+d) \\ &= ac + ad + bc + bd \end{aligned}$$

**Örnek 1)**  $2x - 3y$  ifadesi ile  $3x + 5y$  ifadesini çarpınız.

$$\begin{aligned} (2x - 3y)(3x + 5y) &= 6x^2 - 9xy + 10xy - 15y^2 \\ &= 6x^2 + xy - 15y^2 \end{aligned}$$

**Not:** Çarpının derecesi, iki çokterimlinin dereceleri toplamı kadar olur.

**Örnek 2)**  $(a+b)(a^2-ab+b^2)$   
 $= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$   
 $= a^3 + b^3$

**Örnek 3)**  $2 - a - 3a^2 + a^3$  ile  $1 + 2a - a^2$  ifadelerini çarpınız. Benzer ifadeler alt alta yazılırlar. Altındaki ifadenin her terimi üstteki ifadenin her terimi ile sırasıyla çarpılır. Bu çarpımlar alt alta yazılıp toplanır.

$$\begin{array}{r} 2 - a - 3a^2 + a^3 \\ 1 + 2a - a^2 \\ \hline 2 - a - 3a^2 + a^3 \\ + 4a - 2a^2 - 6a^3 + 2a^4 \\ \hline - 2a^2 + a^3 + 3a^4 - a^5 \\ \hline 2 + 3a - 7a^2 - 4a^3 + 5a^4 - a^5 \end{array}$$

**Örnek 4)**  $a^2 + 2ab - ac + b^2 - bc + c^2$  ile  $a + b + c$  ifadelerini çarpınız.

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab - ac + b^2 - bc + c^2 \\ a + b + c \\ \hline a^3 + 2a^2b - a^2c + ab^2 - abc + ac^2 \\ + a^2b + 2ab^2 - abc + b^3 - b^2c + bc^2 \\ + a^2c + 2abc - ac^2 + b^2c - bc^2 + c^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 \end{array}$$

Örnek 5)

$$\begin{aligned} & (x^4 - 3x^2 - 2x + 1)(x^3 - 2x - 2) \\ & = x^7 - 5x^6 + 7x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 2 \end{aligned}$$

Örnek 6)

$$\begin{aligned} & (a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b) \\ & = a^5 + b^5 \end{aligned}$$

Örnek 7)

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2 \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y \right) \\ & = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{9}x^2y + \frac{1}{12}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{6}xy^2 - \frac{1}{8}y^3 \\ & = \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{36}x^2y + \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{8}y^3 \end{aligned}$$

Örnek 8)

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

Burada önce birinci çarpan ikinci ile çarpılır. Elde edilen çarpım üçüncü ile çarpılır, yine elde edilenle dördüncü çarplılır.

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ & = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bd+cd)x^2 \\ & \quad - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd \end{aligned}$$

Sorular :

1) Aşağıdaki çarpmaları yapınız

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) (x-4)(2x+1) & 2^{\circ}) (x-3)(3x+2) \\ 3^{\circ}) (2x+5)(x-7) & 4^{\circ}) (3x-4y)(4x-3y) \\ 5^{\circ}) (7x^2-5y^2)(4x^2+3y^2) & 6^{\circ}) (5xy+6)(6xy+y^2) \\ 7^{\circ}) (4a^2-b^2c)(8a^3c+2a^2b^2c^2) & 8^{\circ}) (11x^3y-7x^3)(3x^2+y^2) \\ 9^{\circ}) (-ax-y)(-ax+y) & 10^{\circ}) (abc+5)(6abc-7) \\ 11^{\circ}) \left( \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a \right) \left( \frac{1}{2}a - \frac{1}{3} \right) & 12^{\circ}) \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3} \right) \left( \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3} \right) \end{array}$$

2) Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) (x^2+x+1)(x-1) & 2^{\circ}) (a^2-ab+b^2)(a+b) \\ 3^{\circ}) (-3a+5a^2+2)(-5a-4) & 4^{\circ}) (3x^2-4-5x)(2-3x) \\ 5^{\circ}) (2x^2-3xy+2y^2)(3x-5y) & 6^{\circ}) (7-9y+3y^2)(5-8y) \\ 7^{\circ}) (x^3+x^2y+xy^2+y^3)(x-y) & 8^{\circ}) (4x^3-3x^2+2x-1)(2x+1) \\ 9^{\circ}) (x^5-x^4y+xy^4-y^5)(x+y) & 10^{\circ}) (2a^4b-3a^3b^2+4b)(2a^3+3b) \\ 11^{\circ}) \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \right) & 12^{\circ}) \left( \frac{2}{3}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 \right) \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y \right) \end{array}$$

2) Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) x^3 - 3x^2 + 2x)(2x^2 + x - 3) & 2^{\circ}) (4x^2 + 1 - x)(x^2 - 3x + 9) \\ 3^{\circ}) (a^2 - 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) & 4^{\circ}) (3x^2y - 4xy^2 - y^3)(x^2 - 2xy - y^2) \\ 5^{\circ}) (3a - 4b - 5c)(4a + 5b - 3c) & 6^{\circ}) (5x - 7y + 9z)(5x + 7y - 9z) \\ 7^{\circ}) (x^3 - 3xy + y^3)(x^3 - 3xy - y^3) & 8^{\circ}) (4x^2 + 9y^2 - 6xy)(4x^2 + 9y^2 + 6xy) \\ 9^{\circ}) (3a^2 + 2ab + b^2)(-3a^2 + 2ab - b^2) & 10^{\circ}) (1 + x - 2x^2)(3 - 2x + 4x^2) \\ 11^{\circ}) \left( \frac{2}{3}ax + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a \right) \left( \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}ax \right) \end{array}$$

~~3)~~ Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

$$\begin{array}{l} 1^{\circ}) (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3)(a^2 - 2ab + b^2) \\ 2^{\circ}) (a^2 + b^2 + r^2 + 2ab - ax - bx)(a + b + x) \\ 3^{\circ}) (x^2 - x^5y^3 - x^4 + y)(x^3 - y + x) \\ 4^{\circ}) (-x^8 + x^6y^6 - x^6y^2 + y^8)(x^2y^2 + x^4 + y^4) \\ 5^{\circ}) (r^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) \\ 6^{\circ}) (ab + cd + ac + bd)(ab + cd - ac - bd) \\ 7^{\circ}) (a^2 - 1)(a + 1)(a - 1) \\ 8^{\circ}) (r + y)(x - y)(x - y)(x + y) \\ 9^{\circ}) (a - b)(a^2 - 2ab + b^2)(a + b) \\ 10^{\circ}) (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)(a^8 + 1) \end{array}$$

### F — Bir ifadenin karesi:

1 — Bir ifadenin karesini alırken; o ifadeyi kendisi ile çarparız.

$$\text{Örnek: } 1 \quad (3ab)^2 = 3ab \times 3ab = 9a^2b^2$$

$$2: \quad \left( -\frac{4}{3}x^3y^2z \right)^3 = \left( -\frac{4}{3}x^3y^2z \right) \left( -\frac{4}{3}x^3y^2z \right) = \frac{16}{9}x^6y^4z^2$$

$$3: \quad \begin{aligned} (2x+3y)^2 &= (2x+3y)(3x+3y) \\ &= 4x^2 + 6xy + 6xy + 9y^2 \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \end{aligned}$$

2 — İki terimli bir ifadenin karesini almak için, aşağıdaki kaideyi kullanmak daha faydalıdır

$$\begin{array}{c} A+B \\ A+B \\ \hline A^2 + AB \\ AB + B^2 \\ \hline A^2 + 2AB + B^2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} A-B \\ A-B \\ \hline A^2 - AB \\ -AB + B^2 \\ \hline A^2 - 2AB + B^2 \end{array}$$

Kaide: İki terimli bir ifadenin karesi:

Birinci terim karesi, birinci ile ikinci terim çarpımının iki katı, ikinci terim karesi toplamına eşittir.

Örnek 1)  $(2x+7)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(7) + (7)^2$   
 $= 4x^2 + 28x + 49$

Örnek 2)  $\left(-4x^2 + \frac{3}{5}y\right)^2 = (-4x^2)^2 + 2(-4x^2)\left(\frac{3}{5}y\right) + \left(\frac{3}{5}y\right)^2$   
 $= 16x^4 - \frac{24}{5}x^2y + \frac{9}{25}y^2$

Sorular :

Aşağıdakileri kare alma işlemlerini yapınız.

1°)  $(x+y)^2$       2°)  $(a+4)^2$

4°)  $(x-7y)^2$

7°)  $(2x^3-3y^2)^2$

10°)  $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}y\right)^2$

13°)  $\left(-\frac{1}{3}xy - \frac{4}{5}\right)^2$

3°)  $(a^2+1)^2$

5°)  $(2a+9b)^2$

8°)  $(6x^2y^2-3y^2z^2)^2$

11°)  $\left(7x - \frac{3}{14}y\right)^2$

14°)  $\left(1 - \frac{3}{5}x^3 - 3\frac{1}{2}y^2\right)^2$

6°)  $(4a^2B^2-3)^2$

9°)  $(7abc^3d-3b^4c^4d^4)^2$

12°)  $\left(9x+1 - \frac{1}{3}\right)^2$

15°)  $\left(-1 - 3\frac{1}{2}x^2y^2\right)^2$

3 — Üç terimli bir ifadenin karesi için, aşağıdaki işlemi ve kaideyi inceleyiniz.

$$(A+B+C)^2 = (A+B+C)(A+B+C)$$

$$= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

Kaide: Üç terimli bir ifadenin karesini almak için; her terimin kareleri toplanır. Bundan sonra her terimin iki katı kendisinden sonraki terimlerle çarpılarak toplanır.

Örnek 1)  $(x+3y-2z)^2 = (x)^2 + (3y)^2 + (-2z)^2 + 2(x)(3y) + 2(x)(-2z)$   
 $+ 2(3y)(-2z)$   
 $= x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 6xy - 4xz - 12yz$

Örnek 2)  $\left(\frac{1}{2}x - 2y + 1\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4y^2 + 1 - 2xy + x - 4y$

Sorular :

Aşağıdakileri kare alma işlemlerini yapınız

1°)  $(x+y+z)^2$

3°)  $(3x-2y+1)^2$

5°)  $(x^2-2y+1)^2$

7°)  $(2a^2-3b^2-3c)^2$

2°)  $(a+b-c)^2$

4°)  $(x+2y-4)^2$

6°)  $(2x-3y-4z)^2$

8°)  $(x^3+2x^2-7)^2$

9°)  $(ax+a^2x^2+a^3x^3)^2$

11°)  $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1\right)^2$

10°)  $(a^2bc-ab^2c+abc^2)^2$

12°)  $\left(\frac{3}{5}x^2 - 4 + \frac{1}{2}y\right)^2$

4 — Bir ifadenin 3 üncü, 4 üncü... kuvvetini almak için o ifadeyi 3 defa, 4 defa... kendi kendisiyle çarparız.

Örnek :  $(3a + 2b)^3 = (3a + 2b)(3a + 2b)(3a + 2b)$   
 $= (9a^2 + 12ab + 4b^2)(3a + 2b)$   
 $= 27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$

İki terimli bir ifadenin kübü için çarpma yapmadan aşağıdaki kaideyi söyleyebiliriz.

$$(A + B)^3 = (A + B)(A + B)(A + B)$$

$$= (A^2 + 2AB + B^2)(A + B)$$

$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Kaide: İki terimli bir ifadenin kübü alırken,

- 1) Birinci terimin kübü
- 2) Birinci terimin karesiyle ikinci terimin çarpımının üç katı
- 3) İkinci terimin karesiyle birinci terim çarpımının üç katı
- 4) Üçüncü terimin kübü toplanır.

$$(2x-5y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(-5y) + 3(2x)(-5y)^2 + (-5y)^3$$

$$= 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$$

Sorular :

1) Aşağıdakilerin kübelerini alınız.

1°)  $(2x-5)^3$       2°)  $(4x+2y)^3$       3°)  $(x^2-1)^3$

2°)  $(6x+y^2)^3$       5°)  $(3xy-1)^3$       6°)  $(2-x^2y)^3$

7°)  $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{5}\right)^3$       8°)  $\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}b\right)^3$       9°)  $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}xy\right)^3$

2) Aşağıdakilerin kuvvetleri, çarpma gibi dütünerek, alınız.

1°)  $(x+y+z)^3$       2°)  $(2x-3y+1)^3$

3°)  $(x-y-1)^3$       4°)  $(x^2-3x-1)^3$

5°)  $(x+y)^4$       6°)  $(x-3y)^4$

7°)  $(2x+1)^5$       8°)  $(x-y)^5$

G — Cebirsel ifadelerin bölmesi:

1 — İki tek terimliyi birbirine bölerken:

1°) Önce bölümün işaretini bularuz. Bölmede, cebirsel sayılarında olduğu gibi aşağıdaki işaret kaidesini göz önüne alırız:

$$(+A) : (+B) = + (A : B)$$

$$(-A) : (+B) = - (A : B)$$

$$(+A) : (-B) = - (A : B)$$

$$(-A) : (-B) = + (A : B)$$

2°) Kat sayıları bölgerek bölüme katsayı veririz.

3°) Ortak harflerin üslerini çıkararak bu harfe üs veririz. (Bu fark; paydaki harflerin üssü büyükse paya, paydadaki harflerin üssü büyükse paydaya yazılır. Fark sıfır olursa bu harfler birbirlerini götürürler).

4°) Yalnız bölünende veya bölende bulunan başka harfler varsa aynı yerlerinde bırakılır.

Örnek 1 :  $35a^5$  i  $7a^3$  e bölünüz.

$$\frac{35a^5}{7a^3} = \frac{35 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{7 \cdot a \cdot a \cdot a} = 5a \cdot a = 5a^2$$

Örnek 2 :  $12a^3b^2c^3$  i  $4ab^2c^2$  ye bölünüz.

$$\frac{12a^3b^2c^3}{4ab^2c^2} = \frac{12a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c}{4a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c} = 3a \cdot a \cdot c \\ = 3a^2c$$

Örnek 3 :  $45a^6b^2x^4$  i  $-9a^3bx^3$  ye bölünüz.

$$\frac{45a^6b^2x^4}{-9a^3bx^2} = \left(\frac{45}{-9}\right) \cdot a^{6-3} \cdot b^{2-1} \cdot x^{4-2} \\ = -5a^3bx^2$$

Not : Aşağıdaki eşitlikleri izlederseniz :

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0 ; \quad \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$$

$$a^0 = 1$$

olduğu görülür.

Sorular :

Aşağıdaki bölmeleri yapınız.

$$1^{\circ}) (3x^3) : (x^2)$$

$$2^{\circ}) (-35x^6) : (7x^3)$$

$$3^{\circ}) (x^2y^3) : (x^2g)$$

$$4^{\circ}) (4a^2b^2c^3) : (ab^2c^2)$$

$$5^{\circ}) (12a^6b^6c^6) : (-3a^4b^6c)$$

$$6^{\circ}) (-48x^9) : (-8x^3)$$

$$7^{\circ}) (-a^5c^9) : (-ac^3)$$

$$8^{\circ}) (-16x^3y^2) : (-4xg^2)$$

$$9^{\circ}) (7a^2bc) : (-7a^2bc)$$

$$10^{\circ}) (16b^2yx^2) : (-2xy)$$

$$11^{\circ}) (28a^4b^3) : (-4a^3b)$$

$$12^{\circ}) (-50x^3y^3) : (-5x^2y)$$

$$13^{\circ}) \frac{-30x^3y^2}{-6x^2y}$$

$$14^{\circ}) \frac{18bc^3d^3}{-9c^3d}$$

$$15^{\circ}) \frac{-33x^5y^6z^7}{11xy^3z^5}$$

$$16^{\circ}) \frac{-20a^2x^{21}y^2}{20a^2x^{20}}$$

$$17^{\circ}) \frac{-75ab^3c^5}{15ac^3}$$

$$18^{\circ}) \frac{-144a^7b^9c}{-16a^7b}$$

$$19^{\circ}) \left( \frac{2}{3}x^5y^6z \right) : \left( \frac{5}{3}x^3y^2z \right)$$

$$20^{\circ}) \left( -\frac{10}{3}a^4b^5x^2 \right) : \left( \frac{3}{2}a^2bx \right)$$

2 — Bir çok terimli ifadeyi tek terimli bir ifadeye bölerken, çok terimlinin bütün terimlerini o tek terimliye bölünüz.

$$\text{Örnek 1 : } \frac{ax + bx + cx}{x} = \frac{ax}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{cx}{x} \\ = a + b + c$$

$$\text{Örnek 2 : } \frac{-6x^3y^2z^4 - 15xy^2z^3 + 3xyz^2}{-3xyz^2} \\ = \frac{-6x^3y^2z^4}{-3xyz^2} - \frac{15xy^2z^3}{-3xyz^2} + \frac{3xyz^2}{-3xyz^2} \\ = 2x^2yz^2 + 5yz - 1$$

Sorular :

Aşağıdaki bölmeleri yapınız.

$$1^{\circ}) (x^2 - 2xy) : x$$

$$2^{\circ}) (x^3 - 3x^2 + x) : x$$

$$3^{\circ}) (-24x^6 - 32x^4) : (-8x^3)$$

$$4^{\circ}) (34x^3y^2 - 51x^2y^3) : (17xy)$$

$$5^{\circ}) (a^2 - ab - ac) : (-a)$$

$$6^{\circ}) (a^3 - a^2b - a^2b^2) : a^2$$

$$7^{\circ}) (-11x^3y + 22x^2y^2 - 33xy^3) : 11xy$$

$$8^{\circ}) (4a^2x^2 - 40a^3x^3 + 8a^4y^4) : 4a^3$$

$$9^{\circ}) (25a^6 - 20a^4 - 5a^2) : (-5a^2)$$

$$10^{\circ}) \frac{169x^3y^3z^3 - 26x^2y^2z^3 + 39x^2y^3z^2}{13x^2y^2z^3}$$

$$11^{\circ}) \frac{15x^3y - 10x^2y^2 - 5xy^3}{5xy}$$

$$12^{\circ}) \frac{14x^3y^2z - 21xy^2z^3 + xyz}{-xyz}$$

$$13^{\circ}) \frac{-7a^6b^7 - 14a^5b^5 - 21a^4b^5}{-7a^3b^4}$$

$$14^{\circ}) \frac{92x^5y^5 - 115x^3y^4 - 161x^2y^6 + 69x^6y^3}{23xy}$$

$$15^{\circ}) \left( \frac{1}{2}x^5y^2 - 3x^3y^4 \right) : \left( -\frac{3}{2}x^3y^2 \right)$$

$$16^{\circ}) \left( -2a^5x^3 + \frac{7}{2}a^4x^4 \right) : \left( \frac{7}{3}a^3x \right)$$

$$17^{\circ}) \left( -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{3}xy + \frac{10}{3}x \right) : \left( -\frac{5}{6}x \right)$$

$$18^{\circ}) \left( \frac{1}{4}a^2x - \frac{1}{16}abx - \frac{3}{8}acx \right) : \left( \frac{3}{8}ax \right)$$

3 — İki çok terimliyi bir birine bölmek için aşağıdaki yolu takip ediniz.

1°) Her iki çok terimliyle aynı bir harfin azalan (veya coğalan) kuvvetlerine göre diziniz.

2°) Bölünenin soldan ilk terimini bölenden ilk terime böölüz.

3°) Bulacağınız bu bölüm, bölenden bütün terimleri ile çarpanız ve bölünenin altına yazınız. (Aynı kuvvetteki terimler el altı gelsin).

4°) Yazılan bu çarpımı bölünenden çıkarınız. Geri kalan terimlerdek icabeden kadarını bu farkın önüne indiriniz.

Bu yeni çok terimli için yukarıdaki işlemi aynı tekrarlayınız ve bölünenin bütün terimleri aşağı indirilip bölme işlemi bitinceye kadar bu işlemi devam ediniz.

Örnek : 1  $6a^4 + 8a^3 - 11a^2 + 8a - 4$  ifadesini  $3a - 2$  ifadesine böölüz.

Aşağıdaki işlemleri inceleyiniz.

$$\begin{array}{r} (\text{Bölünen}) \cdots \cdots 6a^4 + 8a^3 - 11a^2 + 8a - 4 \quad | \quad 3a - 2 \cdots \cdots (\text{bölen}) \\ \underline{-6a^4 + 4a^3} \qquad \qquad \qquad 2a^3 + 4a^2 - a + 2 \cdots \cdots (\text{bölüm}) \\ +12a^3 - 11a^2 \\ \underline{-12a^3 + 8a^2} \\ -3a^2 + 8a \\ \underline{+3a^2 + 2a} \\ 6a - 4 \\ \underline{-6a + 4} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

Örnek 2 :  $6x^4 + 11x^3 - 6 + 7x^2 - 3x^3$  ifadesini  $3x + 2x^2 - 2$  ifadesine böölüz.

Ifadeleri  $x$  in azalan kuvvetlerine göre :

$$6x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \quad \text{ve} \quad 2x^2 + 3x - 2$$

Şeklinde düzenledikten sonra aşağıdaki işlemleri takip ediniz.

$$\begin{array}{r} (\text{Bölünen}) \cdots \cdots 6x^4 + 7x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \quad | \quad 2x^2 + 3x - 2 \cdots \cdots (\text{bölen}) \\ \underline{-6x^4 + 9x^3 + 6x^2} \qquad \qquad \qquad 3x^2 - x + 3 \cdots \cdots (\text{bölüm}) \\ -2x^3 + 3x^2 + 11x - 6 \\ \underline{+2x^3 + 3x^2 + 2x} \\ 6x^2 + 9x - 6 \\ \underline{-6x^2 + 9x + 6} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Örnek 3 :  $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3xy^2$  yi  $x + y + z$  ifadesine böölüz. Her iki ifadeyi  $x$  in azalan kuvvetlerine göre düzünersek :

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + z^3 \quad \text{ve} \quad x + y + z \quad \text{olur.}$$

Aşağıdaki bölme işlemini takip ediniz.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + z^3 \quad | \quad x + y + z \\ \underline{+x^3 + x^2y + x^2z} \qquad \qquad \qquad x^2 + 2xy - xz + y^2 + z^2 - yz \\ +2x^2y - x^2z + 3xy^2 + y^3 + z^3 \\ \underline{+2x^2y} \qquad \qquad \qquad \underline{+2xy^2} \qquad \qquad \underline{+2xyz} \\ -x^2z + xy^2 - 2xyz + y^3 + z^3 \\ \underline{+x^2z + xz^2 + xyz} \\ +xy^2 + xz^2 - xyz + y^3 + z^3 \\ \underline{+xy^3} \qquad \qquad \qquad \underline{+y^3 + y^2z} \\ +xz^2 - xyz \qquad \qquad \qquad \underline{-y^2z + z^3} \\ \underline{+xz^2} \qquad \qquad \qquad \underline{+yz^2 + z^3} \\ -xyz - y^2z - yz^2 \\ \underline{+xyz + y^2z + yz^2} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Not : Çok kere bölüm, sıfır kalanı vermez. Bölenden dereceinden küçük dereceli bir kalan çıkışında bölmeye artık devam edilmmez.

Örnek :  $(6x^3 + 14x^2 - 4x + 26) : (2 + 6)$

İşlemi yapınız.

$$\begin{array}{r} (\text{Bölünen}) \cdots \cdots 6x^3 + 14x^2 - 4x + 26 \quad | \quad 2x + 6 \cdots \cdots (\text{bölen}) \\ \underline{-6x^3 - 18x^2} \qquad \qquad \qquad 3x^3 - 2x + 4 \cdots \cdots (\text{bölüm}) \\ -4x^2 - 4x + 26 \\ \underline{+4x^2 + 12x} \\ 8x + 26 \\ \underline{+8x + 24} \\ \underline{\underline{+2}} \cdots \cdots (\text{kalan}) \end{array}$$

Bu bölmeyi :

$$\frac{6x^3 + 14x^2 - 4x + 26}{2x + 6} = 3x^2 - 2x + 4 + \frac{2}{2x + 6}$$

Şeklinde gösterilebiliriz.

Sorular :

1) Aşağıdaki bölmeleri yapınız.

1°)  $(x^2 - 7x + 12) : (x - 4)$       2°)  $(a^2 - a - 72) : (a - 9)$

3°)  $(2a^2 + x - 10) : (2a^2 + 5)$       4°)  $(a^2 - ab - 2b^2) : (a - 9)$

5°)  $(x^3 - 1) : (x - 1)$       6°)  $(x^3 - 1) : (x + 1)$

7°)  $(x^4 + 64) : (x^2 + 4x + 8)$       8°)  $(x^2 - xy - 12y^2) : (x - 3y)$

9°)  $(9x^2 - 42xy + 49y^2) : (3x - 7y)$       10°)  $(x^4 - 2x^3y + 2x^2y - xy^3) : (x - y)$

11°)  $(7x^3 - 24x^2 + 58x - 21) : (7x - 3)$       12°)  $(4a^4 + 27ab^3 - 81b^4) : (a + 3b)$

13°)  $(24x^4 + 11x^2 - 18) : (3x^2 - 2)$       14°)  $(3x^3 - 23x^2 + 15x + 12) : (x - 7)$

15°)  $(x^4 - x^3 - 8x^2 + 11x - 3) : (x^2 - 3x + 1)$

- 16°)  $(6a^3 - 20a^2 + 25a - 12) : (2a^2 - 4a + 3)$
- 17°)  $(a^4 - 6a^3b + 9a^2b^2 - 4b^4) : (a^2 - 3ab + 2b^2)$
- 18°)  $(a^3 - 3abc + b^3 + c^3) : (a + b + c)$
- 19°)  $(16x^4 - 24x^3a + 25x^2a^2 - 12xa^3 + 4a^4) : (4x^2 - 3xa + 2a^2)$
- 20°)  $(2x^5 + 6x^4 - 23x^3 + 2x^2 + 16x - 3) : (x^2 + 5x - 1)$
- 21°)  $(2x^6 - x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 6x + 8) : (x^2 - 2)$
- 22°)  $(6a^4 - a^3b - 10a^2b^2 + 31ab^3 - 20b^4) : (3a^2 + 4ab - 5b^2)$
- 23°)  $(x^6 + 5x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x - 1) : (x^2 + 2x - 1)$
- 24°)  $(x^5 + 2x^4y + 3x^3y^2 - x^2y^3 - 3xy^4 - 5y^5) : (x^3 - y^3)$
- 25°)  $\left( \frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{36}ab - \frac{1}{3}b^2 \right) : \left( \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b \right)$
- 26°)  $\left( \frac{1}{16}a^2 + \frac{2}{7}ab + \frac{1}{7}b^2 \right) : \left( \frac{1}{4}a + b \right)$
- 27°)  $\left( \frac{2}{9}a^3 + \frac{3}{16}b^2 + \frac{4}{25}c^2 + \frac{2}{5}ac - \frac{5}{12}ab - \frac{7}{20}bc \right) : \left( \frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b + \frac{4}{5}c \right)$

2) Aşağıdaki kalanlı bölmeleri yapınız.

- 1°)  $(a^3 + b^3) : (a - b)$
- 2°)  $(x^2 - 4x + 6) : (x - 1)$
- 3°)  $(2x^3 - 3x^2 + 2x - 1) : (x - 2)$
- 4°)  $(x^4 - 5x^2 - 4x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$
- 5°)  $(x^4 + x^3 + x^2 - 1) : (x^3 - 3x + 1)$
- 6°)  $(x^6 - x^3 - 1) : (x^2 - 1)$

### H. Cebir ifadelerinin dört işlemine ait örnekler.

1) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

- 1°)  $3(x - 9) - 5(x - 7)$
- 2°)  $(a + 7)(5a + 3) - 2(a^2 - 3a + 7)$
- 3°)  $(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)$
- 4°)  $(x + 6)(x - 4) - (x - 4)(x - 5)$
- 5°)  $(x + 5)^2 - (x - 9)^2 - 140$
- 6°)  $(x + 2g)^2 - 3(x - 5g)(x + 7g)$
- 7°)  $2 - 3(x - 2)^2 - 2(3 - 2x)(1 + x)$
- 8°)  $2x^2 - 3(x - 1)^2 + (x - 2)^2$
- 9°)  $3x^2 + x(1 - x)(2 + x) + x$
- 10°)  $(x - y + z)^2 - x(x - 2y + 2z)$
- 11°)  $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2 - 12xy$
- 12°)  $(a + b)^2 - (a - b)^2 - 2b$
- 13°)  $(2x + 1)^2 + 2(4x - 1) + (2x - 1)^2$
- 14°)  $2(1 - 2x)^2 + (x + y)(a^2 + x)$

2) Aşağıdaki işlemleri yapınız

- 1°)  $a(a + b) - [(a - b)^2 + b(a - b)]$
- 2°)  $(a + x)^2 - (a - x)^2 - [(a + x)(a - x) - (a - x)^2]$
- 3°)  $3(x - y)^2 - 2[(x + y)^2 - (x - y)(x + y)] + 2y^2$
- 4°)  $x(x - y - z) - y(z - x - y) - z(z - y - x) - y^2$
- 5°)  $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) + (a - b)(b - c)(c - a)$

6°)  $(a + b - c)(a + b) + (a - b + c)(a + c) + (b + c - a)(b + c)$

7°)  $(x + y)(x + 1) - (y + 1) - x(y + 1)^2 - y(x + 1)^2$

8°)  $(a + b + c)^2 - 2(a + b + c)(b + c) + (b + c)^2$

9°)  $(x - 1)^2 - 3(x + 1)(x + 2) - x(x^2 - 2)(y - 2x)$

10°)  $3a(a - 2x) - [a - (a - 1)(x + 2) - (a + x)^2] + 5ax$

11°)  $2x^3 + 2xy^2 - [x(x^2 + 3xy + 4y^2) - 2x(x^2 - xy + y^2)]$

3) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

1°)  $(3x - 2y + 1)(6xy - 3x + 2y), (3x - 2y) - (3x - 1)(2y - 1)$

2°)  $(x + 2y + 3z)(2y + 3z - x), 3z + x - 2y)(x + 2y - 3z) - (4y^2 + 9z^2 - x^2)$

3°)  $(2x + 3y + z)^2 + (3y + z - x)^2 + (z + 2x - 3y)^2 + (2x + 3y - z)^2$

4°)  $5a^3(a^2 - 3ab + 2b^2) - b^2(a^3 + a^2b + 4ab^2 - b^3) + 2a^2(a^3 - 2a^2b - 3b^3)$

5°)  $15x^3 + 6x^2 - [9 - (3x - 2)x - (2x + 3)(2x - 3)]x$

6°)  $x^9 - \{[2(x^2 - 1)^2 - (x^2 + 1)(x^2 - 1)]x^2 - (2x^3 - 1)(x^3 + 3)\}$

7°)  $(x + 3)^3 - 3(x + 2)^2 + 3(x + 1)^3 - x^3$

8°)  $(x + y)^3 + (x + y)^2y + (x + y)y^2 - (3xy + 5y^3)x + 2y^3$

9°)  $(1 + x)^3 + (1 + x)^2y + (1 + x)y^2 + y^3 - [3x(x + 1) + y(y + 1) + 2xy + 1]$

10°)  $a(b + c)^2 + b(a + c)^2 + c(a + b)^2 + (a - b)(a + c)(b - c) - (a - b)(a - c)(b + c)$  C : 12 abc

11°)  $[1 - x^3 + 2y(4y^2 + 3x)] : (1 - x + 2y)$

12°)  $[1 - 2x^2(x^4 - x^3 + 1) - 3x^4] : [1 - x(2x^2 + 1)]$

13°)  $[x^3 + (4ab - b^2)x - (a - 2b)(a^2 + 3b^2)] : (x + 2b - a)$

### H - Özdeşlikler:

1 — Tarif: Bir eşitliğin her iki tarafında bulunan kemiyetlerin her değeri için eşitlik gerçekleşiyorsa bu çeşit eşitliklere özdeşlik denir

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Eşitliği bir özdeşlik olur. Çünkü  $a$  ve  $b$  nin her değeri için eşitlik sağlanır.

Meselâ :

$$a = 3 \quad b = 2 \quad \text{für}$$

$$3^2 - 2^2 = (3 + 2)(3 - 2)$$

$$5 = 5 \quad \text{olar.}$$

İki ifadenin özdeş olduğunu belirtmek için o ifadeler arasına  $(\equiv)$  işaret konur.

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

$(a+b)^2 - c^2 \equiv (a+b+c)(a+b-c)$  gibi.

2 — İki ifadenin özdeş olduğunu, bu ifadelerin aynı neticeyi verdiklerini (yani her iki tarafın eşit olduğunu) araştırmak suretiyle buluruz. Bu işleme özdeşliği sağlamak denir.

Örnek 1 :  $(x-y)(y-z)(z-x) \equiv x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x)$   
özdeşliğini sağlayınız.

Birinci taraftaki çarpımlar yapılırsa :

$$\begin{aligned} (x-y)(y-z)(z-x) &= (xy - y^2 - xz + yz)(z-x) \\ &= x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x) \end{aligned} \text{ bulunur.}$$

bu da ikinci tarafın aynıdır.

Örnek 2 :  $(a-b)^3 + (a+b)^3 + 4a^3 - 12ab^2 \equiv 3(a-b)^2(a-b) + 3(a+b)^2(a-b)$

özdeşliğini sağlayınız.

1 nci taraf :

$$\begin{aligned} (a-b)^3 + (a+b)^3 + 4a^3 - 12ab^2 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\ &\quad + b^3 + 4a^3 - 12ab^2 = 6a^3 - 6ab^2 \end{aligned}$$

2 nci taraf :

$$\begin{aligned} 3(a-b)^2(a+b) + 3(a+b)^2(a-b) &= 3(a^2 - 2ab + b^2)(a+b) + 3(a^2 + 2ab + a^2) \\ (a-b) &= 3a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 3b^3 + 3a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - 3b^3 \\ &= 6a^3 - 6ab^2 \end{aligned}$$

Bulunur. Bu şekilde iki tarafın birbirine eşit olduğu görülür,

Örnek 3 :  $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 \equiv (x^2 + y^2)^2$

özdeşliğini sağlayınız.

Her iki taraftaki işlemleri yaparak kısaltalım ve sonuçların aynı olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 &\equiv (x^2 + y^2)^2 \\ x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 &\equiv x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 &\equiv x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned} \text{ bulunur.}$$

Örnek 4 :  $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (ax + by)^2 \equiv (bx - ay)^2$

özdeşliğini sağlayınız. (Lagranj özdeşliği)

Her iki taraftaki ifadeleri kısaltalım.

1 nci taraf :

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (ax + by)^2 &= a^2x^2 + b^2x^2 + a^2y^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\ &= b^2x^2 + a^2y^2 - 2abxy \end{aligned}$$

2 nci taraf :

$$(bx - ay)^2 = b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \text{ bulunur.}$$

Görlüyor ki birinci taraf ikinci tarafın aynıdır.

Örnek 5 :  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \equiv 2(c-b)(c-a) + 2(b-a)(b-c) + 2(a-b)(a-c)$

özdeşliğini sağlayınız.

1 nci taraf :

$$\begin{aligned} (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

2 nci taraf :

$$\begin{aligned} 2(c-b)(c-a) + 2(b-a)(b-c) + 2(a-b)(a-c) &= \\ = 2(c^2 - ac - bc + ab) + 2(b^2 - ab - bc + ac) + 2(a^2 - ab - ac + bc) &= \\ = 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \end{aligned}$$

Bulunur ve iki tarafın eşit olduğu görülür.

3 — Aşağıdaki önemli özdeşlikleri sağlayınız ve hatırlada tutmaya çalışınız.

1 nci gurub :

- 1)  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2)  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3)  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- 4)  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- 5)  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 6)  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 7)  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- 8)  $a^3 - b^3 = (a+b)(b^2 - ab + b^2)$

2 nci gurub :

- 1)  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- 2)  $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
- 3)  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- 4)  $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- 5)  $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$
- 6)  $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
- 7)  $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) = (ax + by)^2 - (ay + bx)^2$
- 8)  $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b)$
- 9)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - c)$

**Sorular :**

Aşağıdaki özdeşlikleri sağlayınız.

- 1°)  $(x+y)(x+z)-x^2 = (y+z)(y+x)-y^2$
- 2°)  $(a+b+c)+a^2+b^2+c^2 = (b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2$
- 3°)  $(a-b)(b-c)(c-d) = bc(c-b)+cd(d-c)+da(a-d)$
- 4°)  $(a-b)^3-b^3-a^3 = 3ab(b-a)$
- 5°)  $4ab(a^2+b^2) = (a^2+ab+b^2)^2 - (a^2-ab+b^2)^2$
- 6°)  $(a+b)(b+c-a)(c+a-b) = a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)$
- 7°)  $8a^3 \equiv (a-b)^3+3(a-b)^2(a+b)+(a+b)^3+3(a-b)(a+b)^2$
- 8°)  $(a+b)^2+(a+c)^2-(a^2+b^2+c^2)^2 = (a+b+c)^2$
- 9°)  $3(a^2+b^2+c^2) = (a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2$
- 10°)  $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2 = 2(a-d)(a+b+c+d)$
- 11°)  $(x+y)^3+2(x^3+y^3) = 3(x+y)(x^2+y^2)$
- 12°)  $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$
- 13°)  $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 = (bx-cy)^2+(cx-az)^2$
- 14°)  $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz$
- 15°)  $(a-b)(a+b-c)+(b-c)(b+c-a)+(c-a)(c+a-b) = 0$
- 16°)  $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b) = 0$
- 17°)  $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2 = 3(a^2+b^2-c^2)+2(ab+ac-bc)$
- 18°)  $(a+b)^2+(a+c)^2+(a+d)^2+(b+c)^2+(b+d)^2+(c+d)^2 =$   
 $(a+b+c+d)^2+2(a^2+b^2+c^2+d^2)$
- 19°)  $[(ax+by)^2+(ay-bx)^2][(ax+by)^2-(ay+bx)] = (a^4-b^4)(x^4-y^4)$
- 20°)  $[(a^2-b^2)x+2aby]^2+[(a^2-b^2)y-2abx]^2 = (a^2+b^2)^2(x^2+y^2)$
- 21°)  $[(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)y]^2-[(a^2+b^2)y+(a^2-b^2)x]^2 = 4a^2b^2(x^2-y^2)$
- 22°)  $(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2 = (ab'-ba')^2$
- 23°)  $(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2 = (bc'+cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2$
- 22) ve 23 özdeşliklerine Lagrange özdeşlikleri denir)
- 24°) (Euler özdeşliği)  
 $(ax+by+cz+dt)^2+(bx-ay+dz-ct)^2+(cx-dy-az+bt)^2 =$   
 $(dx+cy-bz-ac)^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)$

**K - Çarpanlara ayırma:**

Tarif :  $(x+5)(x+3) = x^2+8x+15$

Çarpma işleminde  $x^2+8x+15$  ifadesi  $x+5$  ve  $x+3$  gibi iki ifade- nin çarpımıdır.  $x+5$  ve  $x+3$  ifadeleri çerdanlardır.

$$\begin{array}{ccc} (x+5) & & (x+3) \\ 1. \text{ neç çarpan} & & 2. \text{ neç çarpan} \\ & & \text{Çarpım} \end{array}$$

Bu bölümde, verilen bir ifadeyi mümkünse, iki ve daha fazla çarpanlar şeklinde yazmaya çalışacağiz. Yani, verilen ifadeyi çarpanlarına ayıracagız.

*Suhalde ; bir ifadeyi çarpanlarına ayırmak demek, bu ifadeyi tek terimli veya çok terimli ifadelerin çarpımları şeklinde göstermek demektir.*

$$\begin{array}{c} (x-5)(x+3) = x^2-2x-15 \\ \text{verilen iki ifadenin çarpımı} \\ x^2-2x-15 = (x-5)(x+3) \\ \text{verilen bir ifadenin çarpanları} \end{array}$$

Çarpanlara ayırmak için belli bir yol yoktur. Bu bölümde bazı ifade- lerin çarpanlarına ayrılmasına eit yolları gösterecegiz.

**Not 1)** Her ifade çarpanlara ayrılmaz.

2) Bir ifadenin derecesi çarpanları olan ifadelerin dereceleri topla- mina eşittir.

3) Bir ifadenin çarpanları olan ifadeler basit olursa, yani tekrar çarpanlara ayrılmaz şekilde iseler, bu ifade basit çarpanlarına ayrılmıştır denir.

Meselâ :  $x^4-x^2-y^2$  ifadesi  
 $x^4-x^2-y^2 = (x^2-y^2)(x^2-1)$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Her çarpan tekrar çarpanlarına ayrılsa  
 $= (x-y)(x+y)(x-1)(x+1)$   
 şeklinde ifadenin basit olan çarpanları bulunur.

**1 — Ortak çarpan parantezine almak;**

Bir ifadenin her teriminin bölebilen bir sayı, harf veya bir ifade varsa, bu sayı, bu harf veya bu ifade verilen ifadenin bir çarpanı olur.

$$mx+my+mz=m(x+y+z) \text{ gibi}$$

**Örnek 1 :**  $6x^3y^2-9x^2y^3+12xy^4$   
 ifadesini çarpanlara ayırınız.

Bu üç terimli ifadenin her teriminin  $3xy^2$  ifadesi bölebilir.

Sühalde ifade :

$$3xy^2(2x^2 - 3xy + 4y^2)$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

Örnek 2 :  $(3a-1)(b+2)-(3a-1)(2-b)$

İfadelerinin çarpanlara ayırınız.

Bu iki terimli ifadenin her terimi içinde  $(3a-1)$  ifadesi ortaktır ve,

$$\begin{aligned} &= (3a-1) [(b+2)-(2-b)] \\ &= 2b(3a-1) \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlara ayrılır.

Örnek 3 :  $3x^2(x-4a)-2a^2(x-4a)-(3x^2+2a^2)(4a-x)$

İfadelerini çarpanlara ayırınız.

Verilen ifadeyi ;

$$= 3x^2(x-4a)-2a^2(x-4a)+(3x^2+2a^2)(x-4a)$$

Şeklinde yazabiliriz. Her terimde  $(x-4a)$  çarpanı bulunduğuundan, ifade

$$\begin{aligned} &= (x-4a)[3x^2-2a^2+(3x^2+2a^2)] \\ &= 6x^2(x-4a) \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlarına ayrıltır.

Soruular :

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.  $mx+my+mz = m(x+y+z)$

1°)  $5a-10ab$

2°)  $6a^3-3a^2$

3°)  $5x^4-10x^2$

4°)  $15x^2-5ax$

5°)  $13a^2b^2-39a^4$

6°)  $15abx-9b^2x$

7°)  $25mn+18mn$

8°)  $12a^3y^2+45aby$

9°)  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy$

10°)  $14acd-7cd+21c^2d^2$

11°)  $8xy+2x^3y^2-6x^2y^4$

12°)  $5x^2y^2-15xy+20xyz$

13°)  $4ab-5a^2c^2+6a$

14°)  $17x^3y^5-51x^2y^2+85xy$

15°)  $15a^2b^2x-9b^3y+12b^4$

16°)  $9x^9y^8z^7-6x^8y^8z^8+3x^7y^8z^9$

17°)  $14x^3y^4-21x^3y^3z+49x^3y^2z^2$

18°)  $12a^3b^3-18a^2b^2-24a^4b^4$

19°)  $x^4+x^3-x^2+x$

20°)  $39a^3b^4c^5-26a^4b^5c^6+13a^5b^6c^7$

21°)  $51x^6y^6-34x^5y^5+12x^4y^4$

22°)  $a(x+y)-b(x+y)$

23°)  $4x^2(x-y)-7z^2(x-y)$

24°)  $3x^2(x-3)-3x(x-3)$

25°)  $3x^2(x+9)-(x+9)$

26°)  $6a^2b^2(x+y)-4ab^4(x+y)-(x+y)$

27°)  $(4a-5b)(3x-2y)+(a+4b)(3x-2y)$

28°)  $(7a-3x)(5c-2d)-(6a-2x)(5c-2d)$

29°)  $(a-b)(2a-b+c)+(b-a)(a-b+c)$

30°)  $(2a+1)(3a-2)-(a-4)(2a+1)-(2a+1)^2$

31°)  $(x-y)(a-2)-(y-x)(b+3)-(x-y)(1-c)$

32°)  $2a(2a-3b)+2b(2a-3b)-2a+3b$

33°)  $2a(2a-3b)+2b(2a-3b)-2a+3b$

34°)  $2a(2a-3b)+2b(2a-3b)-2a+3b$

2 — Terimleri ikişer ikişer (veya daha fazla) gruplandırmak:

Bir ifadenin ikişer ikişer veya üçer üçer terimlerini ortak çarpan parantezini alarak, çarpanlara ayırınız. Eğer her grupta tekrar ortak çarpan bulunursa, tekrar bu ortak çarpan parantezine alarak ifadeyi çarpanlara ayırınız.

Örnek 1 :  $ax-ay+bx+by = (ax-ay)-(bx-by)$

$= a(x-y)-b(x-y)$

$= (a-b)(x-y)$

Örnek 2 :  $1+15a^4-5a-3a^3 = 1-3a^3-5a+15a^4$

$= (1-3a^3)-5a(1-3a^3)$

$= (1-3a^3)(1-5a)$

Örnek 3 :  $6x^2-9ax+4bx-6ab = (6x^2-9ax)+(4bx-6ab)$

$= 3x(2x-3a)+2b(2x-3a)$

$= (2x-3a)(3x+2b)$

Örnek 4 :  $12a^3-4ab-3ax^2+bx^2 = (12a^3-4ab)-(3ax^2-bx^2)$

$= 4a(3a-b)-x^2(3a-b)$

$= (3a-b)(4a-x^2)$

Soruular :

Aşağıdaki ifadeleri grupperleştirmekten sonra çarpanlarına ayırınız.

1°)  $a^2+ab+ac+bc$

2°)  $a^2-ac+ab-bc$

3°)  $a^2c^2+acd+a^2c+bd$

4°)  $a^2+3a+ac+3c$

5°)  $2x+cx+2c+c^2$

6°)  $x^2-ax+5x-5a$

7°)  $5a+ab+5b+b^2$

8°)  $ab-by-ay+y^2$

9°)  $ax-bx-az+bs$

10°)  $xy+xy-xt-zt$

39 3  
39 3

13 2  
13 2  
26

$$(m-a)(m+a) = mx + nx - m^2 - n^2$$

- 11°)  $mx-my-mx+my$   
 13°)  $2ax+ay+2bx+by$   
 15°)  $6x^2+3xy-2ax-ay$   
 17°)  $ax^2-3bxy-axy+3by^2$   
 19°)  $ax^2+bx^2+2a+2b$   
 21°)  $2x^4-2x^2+4x^2-2$   
 23°)  $x^4+x^3+2x+2$   
 25°)  $axy+bxy-az-bcz$   
 27°)  $2ax^2+3axy-2bx^2-3by^2$   
 29°)  $ax-bx+by+cy-cx-ay$   
 31°)  $a(x^2+1)-x(a^2+1)$   
 33°)  $(xy+ab)^2+(ay-bx)^2$
- 12°)  $mx-ma+nx-na$   
 14°)  $3ax-bx-3ay+by$   
 16°)  $mx-2my-nx+2ny$   
 18°)  $x^2+mx-y-4xy-4my^2$   
 20°)  $x^2-3x-xy+3y$   
 22°)  $3x^3+5x^2+3x+5$   
 24°)  $y^3-y^2+y-1$   
 26°)  $b^2x^2+c^2x^2-a^2c^2-ab^2$   
 28°)  $amx^2+bmx-y-anxy-bny^2$   
 30°)  $a^2x^2+abx+ac+aby+b^2y+bc$   
 32°)  $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$   
 34°)  $(ax-mby)^2+m(ay+bx)^2$

### 3 — Tam kare olan ifadeler:

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \dots \dots (1)$$

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2 \dots \dots (2)$$

Olduklarını biliyoruz. Eğer verilen ifade (1) ve (2) nin ikinci tarafına uygun ise yani: birinci ve üçüncü terim A, B gibi birer ifadenin karesi ise ve bu A, B ifadelerin çarpımlarının iki katı da ikinci terimi vereyorsa, bu ifadeyi  $(A \pm B)^2$  şeklinde yazabiliriz.

Örnek 1 :  $16x^2+24xy+9y^2$  ifadesini çarpanlarına ayıralım.

Bu ifade bir tam kare şeklindedir. Çünkü: birinci ve üçüncü terimler  $4x$  ve  $3y$  nin kareleri şeklindedir. İkinci terim ise:  $4x$  ve  $3y$  nin çarpımlarının iki katıdır. Şuhalde ifade :

$$\begin{aligned} 16x^2+24xy+9y^2 &= (4x)^2+2(4x)(3y)+(3y)^2 \\ &= (4x+3y)^2 \\ &= (4x+3y)(4x+3y) \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\begin{aligned} \text{Örnek 2 : } 9x^2+42xy+49y^2 &= (3x)^2+2(3x)(7y)+(7y)^2 \\ &= (3x+7y)^2 \\ &= (3x+7y)(3x+7y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek 3 : } \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^2y^2+\frac{1}{9}y^4 &= \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2-2\left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{3}y^2\right)+\left(\frac{1}{3}y^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}\right) \end{aligned}$$

### Sorular :

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

- $$A^2 \mp 2AB+B^2 = (A \mp B)^2$$
- 1°)  $4x^2+4xy+y^2$   
 2°)  $16a^2-24ay+9y^2$   
 3°)  $25x^2-10x+1$   
 4°)  $x^2-20xy+100y^2$   
 5°)  $a^2b^2-6abc+9c^2$   
 6°)  $4x^4+20x^2y+25y^2$   
 7°)  $25x^2y^2-60xy^3+36y^4$   
 8°)  $64x^2-144xy^2+81y^4$   
 9°)  $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$   
 10°)  $9x^2-15xy + \frac{25}{4}y^2$   
 11°)  $\frac{25}{9}x^4-5x^2y^2+\frac{9}{4}y^4$   
 12°)  $\frac{36}{49}x^4y^4-4x^3y^5+\frac{49}{9}x^2y^6$   
 13°)  $(a-b)^2-2c(a-b)+c^2$   
 14°)  $9(x+y)^2+12z(x+y)+4z^2$   
 15°)  $4(x+y)^2-12(x+y)z+9z^2$   
 16°)  $9(x-y)^2-30(x-y)+25$   
 17°)  $16(2a-3)^2-16ab+24b+b^2$   
 18°)  $25(x-y)^2-120xy(x-y)+144x^2y^2$

2) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

(Önce ortak çarpan parantezine alınız. Sonra kalan çarpanı tam kare şeklinde düşününüz )

- 1°)  $4b^2c^3+28bc^2+49c$   
 2°)  $a^5+2a^4+a^3$   
 3°)  $xy^2+2xy+x$   
 4°)  $2m^2n-4mn+2n$   
 5°)  $4x+44x^2y^2+121xy^4$   
 6°)  $81a^3b+126a^2b^2+49ab^3$   
 7°)  $8a^2y-40axy+50x^2y$   
 8°)  $2x^4-8x^3+8x^2$

### 4 — İki Kare farkı şeklinde olan ifadeler:

Verilen ifadenin  $A^2 - B^2$  şeklinde olduğu görülürse:

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

Özdeşliğinden faydalayarak ifadeyi çarpanlara ayırız.

$$\begin{aligned} \text{Örnek 1 : } x^2-16y^2 &= (x)^2-(4y)^2 \\ &= (x+4y)(x-4y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek 2 : } 1-49x^4 &= (1)^2-(7x^2)^2 \\ &= (1+7x^2)(1-7x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek 3 : } (a+2b)^2-4x^2 &= (a+2b)^2-(2x)^2 \\ &= [(a+2b)+2x][(a+2b)-2x] \\ &= (a+2b+2x)(a+2b-2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek 4 : } (3x+4x)^2-(2x+3y)^2 &= [(3x+4y)+(2x+3y)][(3x+4y)-(2x+3y)] \\ &= (3x+4y+2x+3y)(3x+4y-2x-3y) \\ &= (5x+7y)(x+y) \end{aligned}$$

**Sorular :**

1) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayıriz.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

- |  |                                       |  |
|--|---------------------------------------|--|
| 1°) $x^2 - 9$                          | 2°) $25 - 16a^2$                      | 3°) $4a^2 - 49b^2$                       |
| 4°) $400 - 81x^2$                      | 5°) $49x^4 - 1$                       | 6°) $x^6 - 25$                           |
| 7°) $a^4 - 81b^4$                      | 8°) $a^6 - 4x^4$                      | 9°) $144 - x^{12}$                       |
| 10°) $25 - 64x^2$                      | 11°) $25x^{10} - 16a^8$               | 12°) $a^2b^4c^6 - x^{16}$                |
| 13°) $81x^4y^6 - 25z^2$                | 14°) $1 - 100a^6b^4c^2$               | 15°) $x^8 - y^8$                         |
| 16°) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{169}$ | 17°) $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{49}$ | 18°) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{25}{81}b^2$ |

2) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriz.

(Önce ortak çarpana bakınız.)

- |  |                               |                           |
|--|-------------------------------|---------------------------|
| 1°) $3x^2 - 12y^2$   | 2°) $m - 64mn^2$              | 3°) $x^2y^3 - 36y$        |
| 4°) $x^5 - x$  | 5°) $3x^3 - 75xy^6$           | 6°) $242 - 2x^4$          |
| 7°) $9x^3 - xy^4$  | 8°) $2a^3b^5 - 98ab$          | 9°) $x^{12}y^9 - yz^{10}$ |
| 10°) $16ax^4 - 81a$  | 11°) $x^5 - 144xy^2z^6$       | 12°) $ax^6 - ay^6$        |
| 3) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriz.                |                               |                           |
| 1°) $(x+y)^2 - 1$  | 2°) $x^2 - (y+1)^2$           | 3°) $(x-y)^2 - 9$         |
| 4°) $4(x-y)^2 - 25$  | 5°) $1 - 36(x+2y)^2$          | 6°) $x^2 - (y+z)^2$       |
| 7°) $(a+b)^2 - (c+d)^2$                                    | 8°) $(a-b)^2 - (x+y)^2$       |                           |
| 9°) $(4a+x)^2 - (b+y)^2$                                   | 10°) $(u+2b)^2 - (3x+4y)^2$   |                           |
| 11°) $(x+2y)^2 - (3x+1)^2$                                 | 12°) $(a+2b)^2 - 4(c+1)^2$    |                           |
| 13°) $(x+2y)^2 - (3x+1)^2$                                 | 14°) $25(2a-b)^2 - (a-3b)^2$  |                           |
| 15°) $(3a+1)^2 - (2a-1)^2$                                 | 16°) $(7x+3)^2 - (5x-4)^2$    |                           |
| 17°) $(5x+2y)^2 - (3x-y)^2$                                | 18°) $(24x+y)^2 - (23x-y)^2$  |                           |
| 19°) $(2a+b-c)^2 - (a-b+c)^2$                              | 20°) $(x-7y+z)^2 - (7y-z)^2$  |                           |
| 21°) $(x+y-8)^2 - (x-8)^2$                                 | 22°) $(2x+a-3)^2 - (3-2x)^2$  |                           |
| 23°) $(a+b-c)^2 - (x-y+z)^2$                               | 24°) $(2a+2b)^2 - (c+x-2y)^2$ |                           |
| 25°) $(5a^2 - b^2 + 4ab)^2 - (a^2 - 5b^2 - 4ab)^2$         |                               |                           |
| 26°) $(4x^4 - 3y^4 - x^2y^2)^2 - (3x^4 - 4y^4 + x^2y^2)^2$ |                               |                           |

5 — İki kare farkı şecline gelebilen ifadelerin çarpanlara ayrılması:

a) Terimleri guruplandırarak:

Örnek 1 :  $x^2 - 4xy + 4y^2 - 9z^2$  ifadesini çarpanlara ayıriz.

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + 4y^2 - 9z^2 &= (x^2 - 4xy + 4y^2) - 9z^2 \\ &= (x-2y)^2 - 9z^2 \\ &= [(x-2y)+3z][(x-2y)-3z] \\ &= (x-2y+3z)(x-2y-3z) \end{aligned}$$

Örnek 2 :  $2xy + a^2 - x^2 - y^2$  ifadesini çarpanlarına ayıriz.

$$\begin{aligned} 2xy + a^2 - x^2 - y^2 &= a^2 - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= a^2 - (x-y)^2 \\ &= [a - (x-y)][a + (x-y)] \\ &= (a-x+y)(a+x-y) \end{aligned}$$

Örnek 3 :  $a^2 - x^2 - y^2 + b^2 + 2ab + 2xy$  ifadesini çarpanlarına ayıriz.

$$\begin{aligned} a^2 - x^2 - y^2 + b^2 + 2ab + 2xy &= (a^2 + 2ab + b^2) - (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= (a+b)^2 - (x-y)^2 \\ &= [(a+b) - (x-y)][(a+b) + (x-y)] \\ &= (a+b-x+y)(a+b+x-y) \end{aligned}$$

**Sorular :**

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayıriz.

- |   |   |
|---|---|
| 1°) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2$                 | 2°) $a^2 - 2ab + b^2 - x^2$                   |
| 3°) $x^2 - 6x + 9x^2 - 16b^2$               | 4°) $4a^2 + 4ab + b^2 - 9c^2$                 |
| 5°) $x^2 + a^2 + 2ax - y^2$                 | 6°) $2ay + a^2 + y^2 - x^2$                   |
| 7°) $x^2 - a^2 - 2ab - b^2$                 | 8°) $y^2 - c^2 + 2cx - x^2$                   |
| 9°) $1 - x^2 - 2xy - y^2$                   | 10°) $c^2 - x^2 - y^2 + 2xy$                  |
| 11°) $x^2 + y^2 + 2xy - 4x^2y^2$            | 12°) $a^2 - 4ab + 4b^2 - 9a^2c^2$             |
| 13°) $c^2 - a^2 - b^2 + 2ab$                | 14°) $4 - x^2 - 4y^2 - 4xy$                   |
| 15°) $2ab + a^2b^2 + 1 - x^2$               | 16°) $a^4 - x^4 - 2x^2y - y^2$                |
| 17°) $x^2 + y^2 - 1 - 2y$                   | 18°) $9x^2 + y^2 - 25z^2 - 6xy$               |
| 19°) $x^2 - 4ax + 4a^2 - b^2 + 2by - y^2$   | 20°) $y^2 + 2by + b^2 - a^2 - 6ax - 9x^2$     |
| 21°) $x^2 - 2x + 1 - a^2 - 4ab - 4b^2$      | 22°) $9a^2 - 6a + 1 - x^2 - 8xy - 16y^2$      |
| 23°) $x^2 - a^2 + y^2 - b^2 - 2xy + 2ab$    | 24°) $a^2 + b^2 - 2ab - c^2 - d^2 - 2cd$      |
| 25°) $9a^2 - 25x^2 + 4b^2 - 1 - 10x - 12ab$ | 26°) $a^2 - 9b^2x^2 - 1 + 6bx - 10ab + 25b^2$ |

b) Bir terim ekleyip çıkararak :

Örnek 1 :  $a^4 + a^2b^2 + b^4$  ifadesini çarpanlarına ayıriz.Verilen ifadeye  $a^2b^3$  yi ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^3 &= a^4 + a^2b^2 + b^4 + a^2b^2 - a^2b^2 \\ &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab) \end{aligned}$$

**Örnek 2 :**  $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$  ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Madeye  $9x^2y^2$  i ekleyip çıkaralım.

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2y^2 + y^4 &= x^4 - 7x^2y^2 + y^4 + 9x^2y^2 - 9x^2y^2 \\ &= x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 9x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2)^2 - 9x^2y^2 \\ &= (x^2 + y^2 + 3xy)(x^2 + y^2 - 3xy). \end{aligned}$$

### Sorular :

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1º) $x^4 + x^2y^2 + y^4$       | 2º) $x^4 + x^2 + 1$            |
| 3º) $4x^4 - 13x^2 + 1$         | 4º) $4a^4 - 21a^2b^2 + 9b^4$   |
| 5º) $49x^4 - 11x^2y^2 + 25y^4$ | 6º) $9x^4 + 3x^2y^2 + 4y^4$    |
| 7º) $49x^4 + 34x^2z^2 + 25z^4$ | 8º) $16a^4 - 9a^2 + 1$         |
| 9º) $100x^4 - 61x^2 + 9$       | 10º) $100x^4 + 11x^2 + 9$      |
| 11º) $225a^4b^4 - 4a^2b^2 + 4$ | 12º) $32a^4 + 2b^4 - 56a^2b^2$ |
| 13º) $x^4 + 4y^4$              |                                |
| 15º) $a^4b^4 + 324$            |                                |

6 —  $x^2 + Bx + C$  şeklinde verilen üç terimlinin çarpanlarına ayrılması.

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) \dots \dots \dots (1)$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) \dots \dots \dots (2)$$

$$x^2 + (a-b)x - ab = (x+a)(x-b) \dots \dots \dots (3)$$

Özdeşliklerini gözönüne alalım.

Meselâ :  $x^2 + 11x + 30$  gibi ifadenin çarpanlarını arayalım. (1) de olduğu gibi  $a+b=11$ ,  $ab=30$  olmak üzere  $a$ ;  $b$  sayılarını bulabilirsek,

$$x^2 + 11x + 30 = x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

şeklinde çarpanlarına ayırız.

Çarpımları 30 ve toplamları 11 eden iki sayıyı bulmak için, 30'un  $(1 \cdot 30)$ ,  $(2 \cdot 15)$ ,  $(3 \cdot 10)$ ,  $(5 \cdot 6)$  gibi çarpanları arasından toplamı 11 edenini ararız. Toplamları 11 eden çarpanlar 5 ile 6 dir. ifade.

$$x^2 + 11x + 30 = (x+5)(x+6)$$

Şekilde çarpanlarına ayrılmış olur.

Şuhalde :  $x^2 + Bx + C$  şeklindeki ikinci derece ifadesini çarpanlarına ayırmak için, toplamı  $B$  ye ve çarpımı  $C$  ye eşit olan ( $a+b=B$ ,  $a \cdot b=C$ )  $a$ ,  $b$  gibi iki sayı bulmamız gereklidir. Bu şartı sağlayan  $a$ ,  $b$  sayıları bulunduktan sonra ifadeyi,

$$x^2 + Bx + C = (x+a)(x+b)$$

şeklinde çarpanlarına ayırınız.

**Örnek 1:**  $x^2 + 13x + 22$  ifadesini çarpanlara ayırınız.

Burada (1) özdeşliğine göre toplamı 13 ve çarpımı 22 eden iki sayıyı bulmamız gereklidir. Bu sayıların, 22 nin çarpanları içerisinde kolayca 2 ile 11 olduğu görülür.

(22 nin çarpanlarından bir çifti de 1 ile 22 dir. Fakat bunların toplamı 13 etmez. Ancak 2 ile 11 çarpanlarının toplamı 13 eder.) Şuhalde ifade.

$$x^2 + 13x + 22 = (x+2)(x+11)$$

şekilde çarpanlarına ayılır.

**Örnek 2:**  $x^2 - 11x + 28$  ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Burada (2) özdeşliğine göre, yine toplamları 11 ve çarpımları 28 eden  $a$ ,  $b$  sayılarını bulmamız gereklidir. Bu sayılar 4 ile 7 dir. Şuhalde ifade,

$$x^2 - 11x + 28 = (x-4)(x-7)$$

şekilde çarpanlarına ayılır.

**Örnek 3 :**  $x^2 + 2x - 15$  ifadesini çarpanlarına ayırınız. Bu ifadeyi,

$$x^2 + (a-b)x - ab = (x+a)(x-b) \dots \dots \dots (3)$$

özdeşliğini gözönüne alarak çarpanlarına ayırınız.

Bunun için de, çarpımları 15 ve farkları 2 eden  $a$ ,  $b$  gibi iki sayıyı bulmamız gereklidir.

15 in çarpanları  $(1 \cdot 15)$ ,  $(5 \cdot 3)$  dir. Farkı 2 edeni 5 ile 3 dir. Şuhalde ifade,

$$x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$$

şekilde çarpanlarına ayılır.

**Örnek 4 :**  $x^2 - 3x - 10$  ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Yine (3) özdeşliğini düşünerek; çarpımları 10 eden ve farkları  $(-3)$  eden iki sayıyı aramak lâzımdır. Bu sayılar 2 ile 5 dir. Şuhalde ifade,

$$x^2 - 3x - 10 = (x+2)x - 5$$

şekilde çarpanlara ayılır.

**Örnek 5 :** Aşağıdaki çarpanlara ayırmaları inceleyiniz.

$$x^2 + 15x + 56 = (x+7)(x+8)$$

$$x^2 - 15x + 56 = (x-7)(x-8)$$

$$x^2 + x - 56 = (x-7)(x+8)$$

$$x^2 - x - 56 = (x+7)(x-8)$$

Görüldüğü gibi, son terim (+) ise çarpanlara orta terimin işaretini verilir. Son terim (-) ise çarpanlardan mutlak değerle büyük olanına orta terimin işaretini diğerine aksi işaret verilir.

Netice olarak : Son terimin işareti (+) ise çarpanlar toplamı orta terimin kat sayısına eşit olur.

Son terimin işareti (—) ise çarpanlar farkı orta terimin kat sayısına eşit olur.

### Sorular :

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayıriz.

- $$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) x^2+3x+2 & 2^{\circ}) x^2+5x+6 \\ 3^{\circ}) x^2-x-6 & 4^{\circ}) x^2+x-6 \\ 5^{\circ}) x^2+7x-44 & 6^{\circ}) x^2-11x+30 \\ 7^{\circ}) x^2+x-30 & 8^{\circ}) x^2+8x+16 \\ 9^{\circ}) x^2+5x-36 & 10^{\circ}) x^2-5x-36 \\ 11^{\circ}) x^2+3x-28 & 12^{\circ}) x^2-2x-48 \\ 13^{\circ}) x^2-8x-48 & 14^{\circ}) x^2+16x+48 \\ 15^{\circ}) x^2+16x+15 & 16^{\circ}) x^2+13x-48 \\ 17^{\circ}) x^2-26x+48 & 18^{\circ}) x^2-4x-96 \\ 19^{\circ}) x^4-5x^2-36 & 20^{\circ}) x^4-9x^2+8 \\ 21^{\circ}) x^2+6xy-16y^2 & 22^{\circ}) x^2-6xy-16y^2 \\ 23^{\circ}) x^2y^2-23xy+132 & 24^{\circ}) 2x^6-10x^4-28x^2 \\ 25^{\circ}) 2x^3-22x^2-120x & 26^{\circ}) 3axy^2-9ax^2y-30ax^6 \\ 27^{\circ}) 56ax^2y+96axy+8ax^3y & 28^{\circ}) x^2+(2a-3b)x-6ab \\ 29^{\circ}) x^5-25x^3+144x & 30^{\circ}) x^2+(a+b)x+(a-c)(b+c) \\ 31^{\circ}) x^2+(a+b)x+ab & 32^{\circ}) 2(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-16 \\ 33^{\circ}) x^2-(a+2b^2)x+2ab^2 & \\ 35^{\circ}) (x-y)^2-3(x-y)-18 & \end{array}$$

7 —  $Ax^2 + Bx + C$  şeklinde verilen üç teriminin çarpanlara ayrılması:

$$(4x + 3)(5x - 2) = 20x^2 + 7x - 6$$

dir. Bu çarpma işleminde  $20x^2$ ,  $4x$  ile  $5x$  in çarpımıdır.  $-6$  ise,  $+3$  ile  $-2$  nin çarpımıdır.  $7x$  de karşılıklı çarpımların toplamıdır.

Demek ki meselâ  $6x^2 - 13x + 5$  ifadesini çarpanlarına ayırmak yukarıdaki çarpma işleminde olduğu gibi iki tane iki terimli ifade bulmak gerektir. Bulunacak iki terimlerin,

ilk terimleri  $6x^2$  nin çarpanları olacak, son terimleri ise  $5$  in çarpanları olacak ve karşılıklı çarpımların toplamı da  $-13x$  olacaktır.

Basit bir muhakeme ve deneme neticesi,  $6x^2$  ve  $5$  in çarpanlarından hangilerisinin karşılıklı çarpımlarının  $-13x$  etiği bulunabilir.

Burada  $-13x$  terimi negatif olduğu için  $5$  in çarpanlarının ikisini de (—) alırız.

Akla gelen mümkün bütün çarpan şekilleri

$$\begin{array}{cccc} 6x-1 & 6x-5 & 3x-1 & 3x-5 \\ \times & \times & \times & \times \\ x-5 & x-1 & 2x-5 & 2x-1 \\ \hline -31x & -11x & -17x & -13x \end{array}$$

Netice olarak son şeklin doğru olduğu görülür ve

$$6x^2 - 13x + 5 = (3x-5)(2x-1)$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılır.

**Örnek :**  $3x^2 - 83x + 54$  ifadesini çarpanlara ayıriz.

Birinci terimin çarpanları sadece bir çifttir ve bu da  $3x$  ile  $x$  dir.  $54$  ise aşağıdaki çarpanlardan biri olarak düşünülebilir.

$$\begin{array}{c} 1 \cdot 54 ; 2 \cdot 27 ; 3 \cdot 18 ; 6 \cdot 9 ; 9 \cdot 6 ; \\ 18 \cdot 3 ; 27 \cdot 2 ; 54 \cdot 1 \end{array}$$

Birinci çarpanın ilk terimi olan  $3x$  de (3) çarpanı bulunduğuuna göre  $54$  ün çarpanlarından (3) ü ihtiyaca eden bütün şekilleri almamamız gereklidir. Demek ki ancak  $1 \cdot 54$ ; ile  $2 \cdot 27$  çarpanlarını göz önüne almamız lâzımdır. (İkinci terim (—) olduğundan  $54$  ün çarpanlarını (—) almamız gereklidir).

$$\begin{array}{cc} 3x-1 & 3x-2 \\ \times & \times \\ x-54 & x-27 \\ \hline -163x & -83x \end{array}$$

Şuhalde,

$$3x^2 - 83x + 54 = (3x-2)(x-27)$$

olur.

**Örnek :**  $9x^2 + 20x - 21$  ifadesini çarpanlara ayıriz.

$9x^2 = 9x \cdot x$  veya  $3x \cdot 3x$  dir. Fakat  $21$  in çarpanlarından biri  $3$  olduğundan ikinci şekil atılır. Demek ki  $9x \cdot x$  çarpanlarını seçmek lâzımdır.

Son terim olan  $21$  aşağıdaki şekillerde çarpanlarına ayrılabilir.

$$1 \cdot 21 ; 3 \cdot 7 ; 7 \cdot 3 ; 21 \cdot 1$$

Burada sadece  $1 \cdot 21$  ve  $7 \cdot 3$  çarpanlarını denemelidir.

$$\begin{array}{cc} 9x-1 & 9x-7 \\ \times & \times \\ x+21 & x+3 \\ \hline 188x & 20x \end{array}$$

**Suhaldə,**

$$9x^2 + 20 - 21 = (9x - 7)(x + 3)$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılır.

**Sorular :**

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriniz.

$$1^{\circ}) \quad 3x^2 - x - 2$$

$$2^{\circ}) \quad 5x^2 - 9x - 2$$

$$3^{\circ}) \quad 3x^2 - 10x + 3$$

$$4^{\circ}) \quad 60x^2 - 59x - 20$$

$$5^{\circ}) \quad 4a^2 - 10a - 14$$

$$6^{\circ}) \quad 3a^2 - 5a + 2$$

$$7^{\circ}) \quad 4x^2 - 8x + 3$$

$$8^{\circ}) \quad 4x^2 - 11x - 3$$

$$9^{\circ}) \quad 6a^2 - 19a + 10$$

$$10^{\circ}) \quad 9m^2 - 17m - 2$$

$$11^{\circ}) \quad 6a^2 - 17a + 12$$

$$12^{\circ}) \quad 3x^2 + 13x + 4$$

$$13^{\circ}) \quad 6x^2 - 7xy - 3y^2$$

$$14^{\circ}) \quad 4a^2 - 4ab - 3b^2$$

$$15^{\circ}) \quad 4x^2 + 10xy + 4y^2$$

$$16^{\circ}) \quad 8x^2y^2 + 22xy^2 - 6y^2$$

8 — İki küp toplamı ve iki küp farkı şeklinde olan ifadelerin çarpanlara ayrılması:

$$A^3 + B^3 \text{ ve } A^3 - B^3$$

Aşağıdaki :

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \dots \dots (1)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \dots \dots (2)$$

Özdeşliklerinden faydalananarak bu şekilde verilen ifadeler çarpanlarına ayılır.

**Örnek : 1**  $8x^3 - 1$  ifadesini çarpanlarına ayıriniz.

(2) özdeşliğinden ifade

$$\begin{aligned} 8x^3 - 1 &= (2x)^3 - 1^3 \\ &= (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılır.

**Örnek : 2**  $8x^9 + 27y^6$  ifadesini çarpanlarına ayıriniz

(1) özdeşliğinden ifade :

$$\begin{aligned} 8x^9 + 27y^6 &= (2x^3)^3 + (3y^2)^3 \\ &= (2x^3 + 3y^2)(4x^6 - 6x^3y^2 + 9y^4) \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlarına ayılır.

**Örnek : 3**  $(a+b)^3 - x^3$  ifadesini çarpanlarına ayıriniz.

(2) özdeşliğinden ifade :

$$\begin{aligned} (a+b)^3 - x^3 &= [(a+b) - x][(a+b)^2 + (a+b)x + x^2] \\ &= (a+b-x)(a^2 + 2ab + b^2 + ax + bx + x^2). \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlarına ayılır

**Sorular :**

1) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriniz.

$$1^{\circ}) \quad x^3 - y^3 \quad 2^{\circ}) \quad a^3 + 8b^3 \quad 3^{\circ}) \quad 27 - a^3$$

$$4^{\circ}) \quad x^3 + 8y^3 z^3 \quad 5^{\circ}) \quad x^3 - 125 \quad 6^{\circ}) \quad 64y^3 - 27$$

$$7^{\circ}) \quad x^3 y^3 + 1 \quad 8^{\circ}) \quad 1 - 1000x^3 \quad 9^{\circ}) \quad 512x^3 - y^6$$

$$10^{\circ}) \quad x^{12} - y^6 \quad 11^{\circ}) \quad a^6 - 64b^{12} \quad 12^{\circ}) \quad 8x^6 + y^3$$

2) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriniz.

(Önce ortak çarpan parantezine alınır.)

$$1^{\circ}) \quad x + 343x^4 \quad 2^{\circ}) \quad 250x - 2x^7 \quad 3^{\circ}) \quad x^7 + 27xy^6$$

$$4^{\circ}) \quad 3x^3 y^3 - 81x^{12} \quad 5^{\circ}) \quad 2x^3 + 54y^3 \quad 6^{\circ}) \quad 2a^3 b^3 - 1024$$

$$7^{\circ}) \quad 8x^4 - xy^6 \quad 8^{\circ}) \quad x^4 y^4 - 512xy \quad 9^{\circ}) \quad a^4 b^4 - 216ab$$

3) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriniz.

$$1^{\circ}) \quad (a+b)^3 + 1 \quad 2^{\circ}) \quad 125 - (2x-y)^3 \quad 3^{\circ}) \quad 8 - (x+y)^3$$

$$4^{\circ}) \quad (a-b)^3 - 27a^3 \quad 5^{\circ}) \quad 64 - (a-b)^3 \quad 6^{\circ}) \quad 8(x-2y)^3 + 1$$

9 — Üçten fazla iki küp farkı veya toplamı şeklindeki ifadelerin çarpanlarına ait örnekler :

Aşağıdaki özdeşlikleri ve çarpanlara ayırma işlemlerini inceleyiniz.

a)  $a^4 + b^4$  = Çarpanları yoktur.

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \\ &= (a+b)(a-b)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$b) \quad a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

$$\begin{aligned} c) \quad a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 \\ &= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 \\ &= (a^3 + b^3)(a^3 - b^3) \end{aligned}$$

$$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

d)  $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$   
 $a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

e)  $a^8 + b^8 = \text{Çarpanlara ayrılmaz}$   
 $a^8 - b^8 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4)$   
 $= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$   
 $= (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$

f) Aşağıdaki ifadeleri ve çarpanlara ayrılmış şekillerini hatırla tutmak faydalıdır.

- 1)  $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
- 2)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ab)$
- 3)  $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = bc(b-c) + ac(c-a) + ba(a-b)$   
 $= -(b-c)(c-a)(a-b)$
- 4)  $a^2(b+a) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc = (b+c)(c+a)(a+b)$
- 5)  $2a^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)$

Örnek 1)  $x^5 + 32y^5$  ifadesini çarpanlarına ayıriz.

(b) de görüldüğü gibi ifade :

$$\begin{aligned} x^5 + 32y^5 &= x^5 + (2y)^5 \\ &= (x+2y)[x^4 - (x^3)(2y) + x^2(2y)^2 - x(2y)^3 + (2y)^4] \\ &= (x+2y)(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4) \end{aligned}$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılr.

Örnek 2)  $3a^5 - 48ab^8$  ifadesini çarpanlarına ayıriz;

Çözümü :

$$\begin{aligned} 3a^5 - 48ab^8 &= 3a(a^4 - 16b^8) \\ &= 3a(a^2 + 4b^4)(a^2 - 4b^4) \\ &= 3a(a^2 + 4b^2)(a - 2b^2)(a + 2b^2) \end{aligned}$$

Örnek 3 :  $x^8 + x^4y^4 + y^8$  ifadesini çarpanlarına ayıriz

Çözümü : ifade ;

$$\begin{aligned} x^8 + x^4y^4 + y^8 &= (x^4)^2 + (x^2)^2(y^2)^2 + (y^2)^4 \\ &= (x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4) \end{aligned}$$

Şeklinde yazılır. (f) de görüldüğü gibi

$$(x^4 + x^2y^2 + y^4)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

Şeklinde çarpanlarına ayrılr.

### Sorular :

Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıriz.

- |                        |                          |                        |
|------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1°) $x^5 + y^5$        | 2°) $x^7 - y^7$          | 3°) $x^{12} + y^{12}$  |
| 4°) $a^9 - 128b^7$     | 5°) $x^{11} + y^{11}$    | 6°) $x^9 + y^9$        |
| 7°) $32x^5 - 1$        | 8°) $a^{11} - b^{11}$    | 9°) $243 - x^5$        |
| 10°) $x^{10} - y^{10}$ | 11°) $32x^5 - y^{10}$    | 12°) $x^{10} + y^{10}$ |
| 13°) $x^9 - x$         | 14°) $a^8x^6 - 64a^2y^6$ | 15°) $729y^6 - 64x^6$  |

### L – Cebirsel ifadelerde E.B.O.B. ve E.K.O.K.

1 – İki ve daha fazla ifadenin en büyük ortak bölenini bulmak. (E.B.O.B.)

En büyük ortak böleni ararken :

- 1) Her ifadeyi basit çarpanlarına ayıriz.
- 2) Bu çarpanlardan ortak olanlarının en küçük üslü olanlarını alırız.
- 3) Bunların çarpımı bize E.B.O.B. i verir.  
 (İfadelerde çarpan olarak bulunan sayıların E.B.O.B. i, bulunacak E.B.O.B. de katsayı olur.)

Örnek 1 :  $6x^3(x-y)^2$ ,  $15x(x^2-y^2)$  ifadelerinin E.B.O.B. inin bulunuz.

İfadeleri basit çarpanlarına ayıralım.

$$2 \cdot 3 \cdot x^2(x-y)^2, 3 \cdot 5 \cdot x(x-y)(x+y)$$

ortak çarpanlardan en küçük üslüler ;

$$3, x, (x-y) \text{ dir.}$$

Şuhalde :  $E.B.O.B. = 3x(x-y)$  olur.

Örnek 2 :  $ax^2 + 2a^2x + a^3$ ;  $2ax^2 - 4a^2x - 6a^3$ ;  $3(ax + a^2)^2$  ifadelerinin E.B.O.B. ini bulunuz?

İfadeleri basit çarpanlarına ayıralım.

$$ax^2 + 2a^2x + a^3 = a(x^2 + 2ax + a^2) = a(x+a)^2 \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} 2ax^2 - 4a^2x - 6a^3 &= 2a(x^2 - 2ax - 3a^2) \\ &= 2a(x+a)(x-3a) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$3(ax + a^2)^2 = 3a^2(x+a)^2 \dots \dots \dots (3)$$

(1), (2), (3) şeklinde yazılan ifadelerde ortak olan ve en küçük üslü bulunan çarpanlar,  $a$  ve  $(x+a)$  dir.

Şuhalde,  $E.B.O.B. = a(x+a)$  olur

### Sorular :

Aşağıdakii ifadelerin en büyük ortak bölenlerini (E.B.O.B.) bulunuz.

$$1^{\circ}) \quad 4x^2y ; \quad 6xy^2$$

$$2^{\circ}) \quad 5a^3b ; \quad 45a^2b^3$$

$$3^{\circ}) \quad abc^2 ; \quad 3a^2bc^3$$

$$4^{\circ}) \quad 24xy ; \quad 48ax^2 ; \quad 36x$$

$$5^{\circ}) \quad 34a^5x^3 ; \quad 51ax^5$$

$$6^{\circ}) \quad a^3x^2y ; \quad a^2x^3yz$$

$$7^{\circ}) \quad a(a+b) ; \quad a^2-b^2$$

$$8^{\circ}) \quad (x-y)^2 ; \quad x^2-y^2$$

$$9^{\circ}) \quad x^2-3x ; \quad x^2-9$$

$$10^{\circ}) \quad 4x^2+6x ; \quad 6x^2+9x$$

$$11^{\circ}) \quad a^3-x^3 ; \quad a^2-x^2$$

$$12^{\circ}) \quad 4a^3+2a^2 ; \quad 4a^3-a$$

$$13^{\circ}) \quad x^2+x ; \quad x^2-1 ; \quad x^2-x-2$$

$$14^{\circ}) \quad x^2+x-12 ; \quad x^2-x-6 ; \quad x^2-6x+9$$

$$15^{\circ}) \quad x^2+x ; \quad (x+1) ; \quad x^3+1$$

$$16^{\circ}) \quad 2x^3-2x ; \quad 3x^4-3x ; \quad 4x(x-1)^2$$

**2 — İki ve daha fazla ifadenin en küçük ortak katını bulmak (E.K.O.K.)**

En küçük ortak katı ararken;

1) Her ifadeyi basit çarpanlarına ayırırız.

2) Bu çarpanlardan ortak olanların en büyük üslüsünü ve ortak olmayanların hepsini alırız.

3) Bunların çarpımı bize E.K.O.K.ı verir.

(İfadelerde çarpan olarak bulunan sayıların E.K.O.K.ı bulunacak E.K.O.K.da katsayı olur.)

**Örnek 1)**  $4a^2x^2$ ,  $5ax^5$ ,  $10a^2x^2y$  ifadelerinin E.K.O.K.ını bulunuz.

4 ; 5 ; 10 ; katsayılarının E.K.O.K., 20 dir. Her üç ifadede ortak olanlardan en büyük üslü çarpanlar  $a^2$ ;  $x^5$ ;  $y$  dir.

Şuhalde, E.K.O.K. =  $20a^2x^5y$  dir.

**Örnek 2)**  $x^3-9x$ ,  $x^2-6x+9$ ;  $x^4-3x^2$  ifadelerinin E.K.O.K.ını bulunuz.

İfadeler:

$$x^3-9x=x(x+3)(x-3)$$

$$x^2-6x+9=(x-3)(x-3)=(x-3)^2$$

$$x^4-3x^2=x^2(x-3)$$

Şeklinde çarpanlarına ayrırlırlar.

$$\text{E.K.O.K.} = x^3(x+3)(x-3)^2 \text{ olur.}$$

### Sorular :

Aşağıdakii ifadelerin en küçük ortak katlarını (E.K.O.K.) buluz.

$$1^{\circ}) \quad 3x^2y ; \quad 2xy^2$$

$$2^{\circ}) \quad 6a^3b^3 ; \quad 8a^2b^2$$

$$3^{\circ}) \quad 12c^2x^2 ; \quad 9a^3y^2$$

$$4^{\circ}) \quad 16x^2y^3 ; \quad 12x^3y^2$$

$$5^{\circ}) \quad 2ac ; \quad 3bc ; \quad 4ab$$

$$6^{\circ}) \quad 3a^2b ; \quad 4ac^2 ; \quad 6b^2c$$

$$7^{\circ}) \quad 12a^2b ; \quad 16ab^2 ; \quad 24a^2b^2$$

$$8^{\circ}) \quad 3x^3 ; \quad 8 ; \quad 6x^2y ; \quad 12xy^2$$

$$9^{\circ}) \quad 2x(x+1) ; \quad x^2-1$$

$$10^{\circ}) \quad a^2+ab ; \quad ab+b^2$$

$$11^{\circ}) \quad 4x^2y-y ; \quad 2x^2+x$$

$$12^{\circ}) \quad 6x^2-2x ; \quad 9x^2-3x$$

$$13^{\circ}) \quad x^2+2x ; \quad x^2+3x+2$$

$$14^{\circ}) \quad x^2-1 ; \quad x^2-3x+2$$

$$15^{\circ}) \quad x^2+4x+4 ; \quad x^2+5x+6$$

$$16^{\circ}) \quad x^2-5x+4 ; \quad x^2-6x+8$$

$$17^{\circ}) \quad ax^2(x-y)^2 ; \quad bxy(x^2-y^2)$$

$$18^{\circ}) \quad x^2-3x-40 ; \quad x^2-9x+8$$

$$19^{\circ}) \quad 6x^2+6x ; \quad 2x^3-2x^2 ; \quad 3x^2-3$$

$$20^{\circ}) \quad a^2b+ab^2 ; \quad a^2b-ab^2 ; \quad 3a^2-3b^2$$

$$21^{\circ}) \quad 4x^2-1 ; \quad 2x^2+x-1 ; \quad 2x^2+3x+1$$

$$22^{\circ}) \quad x^3-y^3 ; \quad x^3+y^3 ; \quad x^2-y^2$$

$$23^{\circ}) \quad x^2+x-6 ; \quad x^2+x-2 ; \quad x^2-4x+3$$

$$24^{\circ}) \quad x^2+x-20 ; \quad x^2-10x+24 ; \quad x^2-x-30$$

$$25^{\circ}) \quad (2x^2-3xy)^2 ; \quad (4x-6y)^3 ; \quad 8x^3-27y^3$$

$$26^{\circ}) \quad 14a^4(a^3-b^3) ; \quad 21a^2b^2(a-b)^3 ; \quad 6a^3b(a-b)(a^2-b^2)$$

$$27^{\circ}) \quad (x-1)^3 ; \quad 7xy^3(x^2-1)^2 ; \quad 14x^5y(x+1)^3$$

$$28^{\circ}) \quad (x-1)(x+3)^2 ; \quad (x+1)^2(x-3) ; \quad (x^2-1)^2 ; \quad (x^2-9)$$

3 — Bir tam sayıyı veya bir cebir ifadesini paydası (1) olan bir kesir gibi düşünebiliriz.

$$\text{Meselâ : } a = \frac{a}{1} , \quad x + y = \frac{x + y}{1}$$

şeklinde yazabiliriz.

Kesirlerin özellikleri : Aritmetikte gördüğümüz kesir özellikleri rasyonel kesirler için de doğrudur. Bu özellikleri birer örnekle aşağıda tekrarlıyalım.

4 — Bir kesri genişletmek : Bir kesrin pay paydası sıfırdan farklı herhangi bir cebir ifadesi ile çarpılırsa kesrin değeri değişmez,

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \quad (C \neq 0)$$

(Bu işleme kesri genişletmek denir.)

$$\text{Örnek 1)} \quad \frac{2x}{5-x} = \frac{2x \cdot x}{x(5-x)} = \frac{2x^2}{5-x^2}$$

$$2) \quad \frac{3-a}{a^2-1} = \frac{(3-a)(b-c)}{(a^2-1)(b-c)}$$

$$3) \quad \frac{2(x-y)}{x^2-xy+y^2} = \frac{2(x-y)(x+y)}{(x^2-xy+y^2)(x+y)} = \frac{2(x^2-y^2)}{x^3+y^3}$$

5 — Bir kesri kısaltmak : Rasyonel bir kesrin pay ve paydası sıfırdan farklı herhangi bir ifade ile bölündürse kesrin değeri değişmez.

$$\frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C} \quad (C \neq 0)$$

Bu işleme kesri kısaltmak denir.

Rasyonel bir kesri kısaltmak için, bu kesrin pay ve paydası çarpanlara ayrılır: ortak çarpanlar varsa pay ve payda bu ortak çarpanları bölündür.

$$\text{Örnek 1 : } \frac{6ab^3c^4}{9a^2b^3c^3} \text{ kesriyi kısaltınız.}$$

Bu kesrin pay ve paydasında  $3, a, b^2, c^3$  çarpanları ortaktır. Kesrin pay ve paydası  $3ab^3c^3$  le bölündürse :

$$\frac{6ab^2c^4}{9a^2b^3c^3} = \frac{3ab^2c^3 \cdot 2c}{3ab^2c^3 \cdot 3a} = \frac{2c}{3a}$$

Sonucu bulunur.

$$\text{Örnek 2 : } \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \text{ kesrinizi kısaltınız.}$$

kesrin pay ve paydasını çarpanlara ayırarak ;

## BÖLÜM IV

### Kesirli cebirsel ifadeler ve dört işlemi

#### A — Rasyonel kesirler ve özellikler:

1 — Aritmetikde  $\frac{3}{5}$  şeklinde yazılan bir kesrin mânâsını ve kesirlere ait özellikleri görmüştük. (Bölüm 1)

Burada, A ve B gibi cebir ifadelerinden teşekkül eden  $\frac{A}{B}$  şeklindeki kesirleri ve özelliklerini göreceğiz.

Pay ve paydası rasyonel cebirsel ifadeler olan kesirlere rasyonel kesirler denir.

$$\frac{3x}{4y^2} = \frac{2a}{5-b}, \quad \frac{x^2-1}{2x-4} \text{ gibi.}$$

2 — Bir kesrin nümerik değeri:  $\frac{A}{B}$  kesrinde, A, B ile gösterilen cebir ifadelerindeki harflerin yerine nümerik değerleri konarak bulunur. Bunun mümkün olabilmesi için paydanın sıfırdan farklı yani,

$$B \neq 0$$

olması lâzımdır.  $B=0$  olursa A'nın nümerik değeri ne olursa olsun bölmün mânâsı kalmaz.

Şuhalde,  $\frac{A}{B}$  gibi rasyonel bir kesirde daima  $B \neq 0$  olması gözönünde bulunmalıdır.

$$\text{Meselâ : } \frac{3x+5}{y-1} \text{ kesrinin } x=3, y=5$$

icin nümerik değeri,

$$\frac{3 \cdot 3 + 5}{5-1} = \frac{14}{4} = \frac{14}{4} \text{ olur.}$$

Bu örnekte  $x=3, y=1$  için nümerik değer olamaz. Çünkü :  $y=1$  için payda sıfır olur. Bu kesrin  $y=1$  için değeri sınırlı degildir.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

şeklinde yazabiliyoruz. Pay ve paydayı  $(x-2)$  ortak çarpanı ile bölersek kesir :

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x-1}{x+2}$$

şeklinde kısaltılmış olur.

**Örnek 3 :**  $\frac{a^3 - 6a^2 + 8a}{6a^4 - 24a^2}$  kesrini kısaltınız.

Kesrin pay ve paydasını çarpanlarına ayırsak kesir,

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - 6a^2 + 8a}{6a^4 - 24a^2} &= \frac{a(a^2 - 6a + 8)}{6a^2(a^2 - 4)} \\ &= \frac{a(a-2)(a-4)}{6a^2(a+2)(a-2)} \\ &= \frac{a-4}{6a(a+2)} \end{aligned}$$

şeklinde kısaltılmış olur.

**Örnek : 4**  $\frac{x^2 + xy - 2y^2}{y^2 - x^2}$  kesrini kısaltınız.

Pay ve paydayı çarpanlara ayıralım :

$$\frac{x^2 + xy - 2y^2}{y^2 - x^2} = \frac{(x-y)(x+2y)}{(y+x)(y-x)}$$

$\frac{A}{B}$  kearını,

$$\frac{+A}{+B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{+A}{-B} = -\frac{-A}{+B}$$

yazabileceğimizi düşünerek :

$$\frac{(x-y)(x+2y)}{(y+x)(y-x)} = -\frac{(x-y)(x+2y)}{(y+x)(x-y)}$$

şeklinde yazabiliyoruz. Pay ve paydayı  $(x-y)$  ile bölersek :

$$\frac{x^2 + xy - 2y^2}{y^2 - x^2} = -\frac{x+2y}{y+x}$$

şeklinde kısa olarak yazabiliyoruz.

### Sorular:

Aşağıdaki kesirleri kısaltınız.

(Pay ve paydalarını çarpanlarına ayıriz. Ortak çarpan varsa pay ve paydayı bu çarpana bölünüz).

- |      |  |      |   |      |   |
|------|--|------|---|------|---|
| 1°)  | $\frac{3a^2}{9a^4}$                                | 2°)  | $\frac{24x^3y^5}{8x^2y^2}$                            | 3°)  | $\frac{25x^4}{125x^5y}$                 |
| 4°)  | $\frac{4x^3y^4}{6x^2y^5}$                          | 5°)  | $\frac{24a^6bc^5}{30a^3b^2c^5}$                       | 6°)  | $\frac{250x^3y^3z^6}{25x^5y^4z^5}$      |
| 7°)  | $\frac{34x^5y^6z^5}{85x^7y^9z^4}$                  | 8°)  | $\frac{23x^9y^7}{46x^4y^4z^2}$                        | 9°)  | $\frac{72x^2y^3z^4}{96xy^5z^3}$         |
| 10°) | $\frac{3a^2x}{6a^2 - 9a^3x}$                       | 11°) | $\frac{2x}{4x^2 - 2x}$                                | 12°) | $\frac{3x - 6y}{6ax - 12ay}$            |
| 13°) | $\frac{4x+4y}{4ax+4ay}$                            | 14°) | $\frac{x^2 - y^2}{(x-y)^2}$                           | 15°) | $\frac{8(a^2-1)}{12a-12}$               |
| 16°) | $\frac{45(x-y)^2}{18(x-y)^3}$                      | 17°) | $\frac{a^2b+ab^2}{2a^2b-2ab^2}$                       | 18°) | $\frac{6xy}{9x^2y - 12xy^2}$            |
| 19°) | $\frac{2a^2 - 3ab}{4a^3 - 9ab^2}$                  | 20°) | $\frac{49x^2 - 64y^2}{14x^3 - 16x^2y}$                | 21°) | $\frac{9a^2b + 12ab^2}{9a^3b - 15ab^3}$ |
| 22°) | $\frac{ax+bx-cx}{ay+by-cy}$                        | 23°) | $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$                   |      |   |
| 24°) | $\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$              | 25°) | $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 8x + 16}$                  |      |   |
| 26°) | $\frac{(x-y)^2(x+y)^3}{(x^2-y^2)^3}$               | 27°) | $\frac{2x^2 - 8y^2}{4x^2 - 2xy - 12y^2}$              |      |   |
| 28°) | $\frac{6x^2 - xy - 2y^2}{6x^2 - 7xy + 2y^2}$       | 29°) | $\frac{(x+y)^2 - z^2}{x^2 - (y+z)^2}$                 |      |   |
| 30°) | $\frac{1 - (x-y)^2}{y^2 - (x-1)^2}$                | 31°) | $\frac{4 - (a+b)^2}{(a+\varepsilon^2 - b^2)^2}$       |      |   |
| 32°) | $\frac{12x^2 - 2ax - 24a^2}{4x^2 - 2ax - 6a^2}$    | 33°) | $\frac{x^3 - 8}{x^2y^2 - 2xy^2 + 4y^3}$               |      |   |
| 34°) | $\frac{x^4 - 9x^2}{x^4 - x^3 - 6x^2}$              | 35°) | $\frac{x^6 - y^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$                |      |   |
| 36°) | $\frac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}{(2x+y)^2 - (z-x)^2}$ | 37°) | $\frac{(ab-1)^2 - (a-b)^2}{(b^2+1)^2 - 2(b^2+1)}$     |      |   |
| 38°) | $\frac{ax+ay-cx-cy}{ax+ay+cx+cy}$                  | 39°) | $\frac{2ac - 2ad - 3bc + 3bd}{2ac - 2ad + 3bc - 3bd}$ |      |   |
| 40°) | $\frac{x^8 - 1}{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}$               | 41°) | $\frac{(a^5 + 1) - (a^3 + 1)}{a^2 - 1}$               |      |   |

**6 — Kesirlerin paydalarını eşitlemek :**

İki ve daha fazla kesrin paydalarını eşit yapmak için.

1. Paydalar basit çarpanlarına ayrılır,

2. Paydaların en küçük ortak katı bulunur.

3. Her kesir paydaşı bu en küçük ortak kat olacak şekilde genişletilir. (En küçük ortak kat her kesrin paydasına bölünüp çıkan bölüm ile bu kesirlerin payı çarpılırsa, kesirlerin değerleri bozulmadan paydaları eşit yapılmış olur.)

**Örnek 1 :**  $\frac{2}{3ax} ; \frac{2}{4a^2x} ; \frac{5}{6ax^2}$  Kesirlerinin paydalarını

eşitleyiniz.

$3ax$ ,  $4a^2x$ ,  $6ax^2$  paydalarının en küçük ortak katı  $12a^3x^2$  dir.

Birinci kesri  $4ax$  ikinciyi  $3x$  üçüncüyü  $2a$  ile genişletirsek, kesirlerin.

$$\frac{8ax}{12a^2x^3}, \frac{9x}{12a^2x^2}, \frac{10a}{12a^2x^2}$$

şeklinde paydaları eşitlenmiş olur.

**Örnek 2 :**  $\frac{3x}{x^2 - 9} ; \frac{3x - 2}{x^2 - 4x + 3} ; \frac{5}{x^2 + 2x - 3}$

Kesirlerin paydalarını eşitleyiniz.

Paydaları çarpanlarına ayırarak yazalım.

$$\frac{3x}{(x+3)(x-3)} ; \frac{3x-2}{(x-3)(x-1)} ; \frac{5}{(x-1)(x+3)}$$

Paydaların E.K.O.K.ı.

$$E.K.O.K. = (x+3)(x-3)(x-1)$$

Birinci kesri  $(x-1)$ , ikinci kesri  $(x+3)$ , Üçüncü kesri  $(x-3)$  le genişletirsek kesirlerin;

$$\frac{3x^2 - 3x}{(x+3)(x-3)(x-1)} ; \frac{3x^2 - 7x - 6}{(x+3)(x-3)(x-1)} ; \frac{5x - 15}{(x+3)(x-3)(x-1)}$$

şeklinde paydaları eşitlenmiş olur.

**Sorular:**

Aşağıdaki kesirlerin paydalarını eşitleyiniz.

( Paydasız olanları  $A = \frac{A}{1}$  şeklinde düşününüz.)

$$1^{\circ}) \frac{2a}{9} ; \frac{5a}{6}$$

$$2^{\circ}) \frac{12x}{5y} ; \frac{7}{10} ; \frac{x}{y}$$

$$3^{\circ}) \frac{1}{2xy^2} ; \frac{2}{x^2y} ; \frac{1}{xy}$$

$$4^{\circ}) \frac{2}{3x} ; \frac{13}{6x}$$

$$5^{\circ}) \frac{3}{2ac} ; \frac{2}{4bc} ; \frac{1}{3ab}$$

$$6^{\circ}) \frac{2}{3a^2} ; \frac{3}{4ax} ; \frac{1}{x} ; 2a$$

$$7^{\circ}) 3x ; \frac{x^2}{6} ; \frac{6}{x^3}$$

$$8^{\circ}) \frac{ac}{bd} ; \frac{ab}{cd} ; \frac{bc}{ad} ; \frac{ad}{ba}$$

$$9^{\circ}) \frac{1}{a-b} ; \frac{a}{a^2-ab}$$

$$10^{\circ}) \frac{1}{x^2-1} ; \frac{3}{x+1}$$

$$11^{\circ}) \frac{3}{x^2-ax} ; \frac{4}{x^3-a^2x}$$

$$12^{\circ}) \frac{3a+2}{3a-9} ; \frac{2a^2+1}{a^2-9}$$

$$13^{\circ}) \frac{x}{x^2-1} ; \frac{1}{x^3-1}$$

$$14^{\circ}) \frac{3}{a^2b+ab^2} ; \frac{4}{a^2b-ab^2}$$

$$15^{\circ}) \frac{3}{x+a} ; \frac{5}{x-a} ; \frac{6}{x^2-a^2}$$

$$16^{\circ}) \frac{1}{3x-6} ; \frac{5}{2x+4} ; \frac{3}{x^2-4}$$

$$17^{\circ}) \frac{2}{x-x^2} ; \frac{x}{3+3x} ; \frac{x}{2-2x}$$

$$18^{\circ}) \frac{1}{4-x^2} ; \frac{2}{2x+x^2} ; \frac{3}{4-2x}$$

$$19^{\circ}) \frac{1}{4x^2-9} ; \frac{1}{2x+3} ; \frac{1}{x}$$

$$20^{\circ}) \frac{x+1}{x^2+x-6} ; \frac{x-1}{x^2+4x+3} ; 2x$$

$$21^{\circ}) \frac{1}{2x^2+3x-2} ; \frac{1}{x^2+3x+2} ; \frac{1}{2x^2+x-1}$$

$$22^{\circ}) \frac{x+3}{x^2-3x+2} ; \frac{x+2}{x^2-4x+3} ; \frac{x+1}{x^2-5x+6}$$

$$23^{\circ}) ab ; \frac{ab}{(a-b)^2} ; \frac{2}{(a+b)^2}$$

**B — Rasyonel kesirlerin dört işlemi:****1 — Rasyonel kesirlerde toplama ve çıkarma:**

Rasyonel kesirlerde toplama ve çıkarma yapmak için :

1<sup>o</sup>) Her kesir en kısa şekilde yazılır.

(Bunun için pay ve payda çarpanlara ayrılır ve mümkünse kısaltılır.)

2<sup>o</sup>) Paydalar eşitlenir.

(Bunun için paydaların en küçük ortak katı bulunur ve her kesik payası bu olacak şekilde genişletilir.)

3<sup>o</sup>) Ortak payda aynı kalmak şartıyla paylar toplanır, veya çıkarılarak olarak yazılır.

4<sup>o</sup>) Bulunan neticeler kısaltılır.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD} = \frac{AD+BC}{BD}$$

**Örnek 1 :**  $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x+2}$  İşlemi yapınız.

Paydaların E.K.O.K.  $x(x+1)(x+2)$  dir.

Paydalar eşitlenirse ifade,

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} - \frac{2x(x+2)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x+1)(x+2) - 2x(x+2) + x(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 2 - 2x^2 - 4x + x^2 + x}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)(x+2)} \end{aligned}$$

şekline gelir.

**Örnek 2 :**  $\frac{x}{x-1} - x + \frac{1}{x^2-x} + \frac{1}{x}$  ifadesini kısaltınız.

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{x-1} - \frac{x}{1} + \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x^3 - x^3 + x^2 + 1 + x - 1}{x(x-1)} \\ &= \frac{-x^3 + 2x^2 + x}{x(x-1)} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x-1} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Örnek 3 :**  $\frac{x+2y}{x^2-xy} + \frac{2x+y}{x^2-3xy+2y^2} - \frac{x-3y}{x^2-2xy}$  ifadesini kısaltınız.

Paydaları çarpanlarına ayırarak yazalım:

$$= \frac{x+2y}{x(x-y)} + \frac{2x+y}{(x-y)(x-2y)} - \frac{x-3y}{x(x-2y)}$$

Ortak Payda = E.K.O.K.  $= x(x-y)(x-2y)$  dir.

$$= \frac{(x+2y)(x-2y) + x(2x+y) - (x-3y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$= \frac{x^3 - 4y^2 + (2x^2 + xy) - (x^2 - 4xy + 3y^2)}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$= \frac{x^2 - 4y^2 + 2x^2 + xy - x^2 + 4xy - 3y^2}{x(x-y)(x-2y)}$$

$$= \frac{2x^2 + 5xy - 7y^2}{x(x-y)(x-2y)} = \frac{(2x+7y)(x-y)}{x(x-y)(x-2y)} = \frac{2x+7y}{x(x-2y)}$$

bultur.

### Sorular :

1) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.

$$1^{\circ}) \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{6}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{3x}{8} - \frac{5x}{12} + \frac{7x}{6} - \frac{3x}{4}$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{x-3}{3} + \frac{x+5}{6} + \frac{x-4}{6}$$

$$4^{\circ}) \quad \frac{x+a}{15} - \frac{a}{5} - \frac{a-x}{10}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{5a-7b}{4} - \frac{3a-5b}{6} + \frac{11a-3b}{12}$$

$$6^{\circ}) \quad \frac{3a+4b}{9} - \frac{5a-7b}{15} - \frac{6a+11b}{45}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{4x-1}{6} - \frac{a-x}{8} - \frac{x+3a-5}{30}$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{x-5a}{6} - \frac{3x+2a}{18} - \frac{a-7x}{20}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{3a-4b}{2} - \frac{2a-b-c}{3} + \frac{15a-4c}{12}$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{3x-1}{7} - \frac{x-6}{4} + \frac{x+2}{28} + 2 + \frac{2x-4}{12}$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{2(x+3)}{7} - \frac{3(x-4)}{4} - \frac{5(x+5)}{12} + \frac{x+2}{21}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{2a+3b-4c}{8} - \frac{5a-3b+2c}{12} + \frac{7a+5b-8c}{36} - \frac{3(2a-3b+2c)}{24}$$

2) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.

$$1^{\circ}) \quad \frac{3}{2x} + \frac{2}{x} - \frac{1}{3x}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{2}{3a} - \frac{3}{4ax} + \frac{1}{x}$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{5}{2ac} - \frac{2}{3ab} - \frac{1}{bc}$$

$$4^{\circ}) \quad \frac{1}{4x} + 1 - \frac{2}{x}$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{3a-b}{2a} + \frac{a-4b}{3b}$$

$$6^{\circ}) \quad \frac{a+2b}{2ab} - \frac{6a-1}{6a^2}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{x+1}{x} - 3 + \frac{7-3x}{3x^2}$$

$$8^{\circ}) \quad \frac{x-y}{2y} - 5 + \frac{3xy-y^2}{y^2}$$

$$9^{\circ}) \quad \frac{7x+5y}{5x^2} - \frac{2y-3z}{7yz} + \frac{4y}{3xz}$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{2}{5a} + \frac{9a-2b}{15ab} - \frac{a+b}{10a^2}$$

$$11^{\circ}) \quad \frac{7a-3b}{12ab} - \frac{5a+6b}{18b} - \frac{5ab-8b}{30a}$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{2a+3}{6a^2} + \frac{a}{2b^2} + \frac{3a-2b}{6ab}$$

3) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.

$$1^{\circ}) \quad \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}$$

$$2^{\circ}) \quad \frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$$

$$4^{\circ}) \quad \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$$

$$5^{\circ}) \frac{x+1}{x-2} + \frac{1-x}{x+2}$$

$$7^{\circ}) \frac{a}{x(a-x)} - \frac{a}{a(a-x)}$$

$$9^{\circ}) \frac{x}{x-1} + 1 - \frac{x}{x+1}$$

$$11^{\circ}) \frac{1}{x^2+x} - 2 + \frac{2x^2}{x^2-x}$$

$$13^{\circ}) \frac{10}{9-a^2} - \frac{2}{3+a} - \frac{1}{3-a}$$

$$15^{\circ}) \frac{2a-x}{x-a} + \frac{a-2x}{x+a} + \frac{3x(x-a)}{x^2-a^2}$$

$$17^{\circ}) \frac{3}{4x} - \frac{1}{2+2x} + \frac{2}{2x-3x^2}$$

$$19^{\circ}) \frac{2a-7b}{a-4b} - \frac{5ab-4b^2}{4a^2-16ab} + \frac{b}{4a}$$

$$20^{\circ}) \frac{5a}{6b} - \frac{10a^2-17ab}{12ab-b^2} - \frac{b}{b-2a}$$

4) Aşağıdaki işlemleri yapınız. (Sonuçları karşılaştırınız.)

$$1^{\circ}) \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} \quad \left( \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} \right)$$

$$2^{\circ}) \frac{5x}{2(x+1)(x-3)} - \frac{15(x-1)}{16(x-3)(x-2)} - \frac{9(x+3)}{16(x+1)(x-2)} \quad \left( \frac{1}{x+1} \right)$$

$$3^{\circ}) \frac{a+3b}{4(a+b)(a+2b)} + \frac{a+2b}{(a+b)(a+3b)} - \frac{a+b}{4(a+2b)(a+3b)} \quad \left( \frac{1}{a+b} \right)$$

$$4^{\circ}) \frac{x}{x^2+5x+6} + \frac{15}{x^2+9x+14} - \frac{12}{x^2+10x+21} \quad \left( \frac{1}{x+2} \right)$$

$$5^{\circ}) \frac{5(2x-3)}{11(6x^2+x-1)} + \frac{7x}{6x^2+7x-3} - \frac{12(3x+1)}{11(4x^2+8x+3)} \quad \left( \frac{1}{2x+1} \right)$$

$$6^{\circ}) \frac{1}{8-8x} - \frac{1}{8+8x} + \frac{x}{4+4x^2} - \frac{x}{2-2x^4} \quad \left( \frac{1}{1-x^4} \right)$$

$$7^{\circ}) \frac{1}{3x^2-4xy+y^2} + \frac{1}{x^2-4xy+3y^2} - \frac{3}{3x^2-10xy+3y^2} \quad \left( \frac{1}{(3x-y)(x-3y)} \right)$$

$$8^{\circ}) \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{3x-2}{x^2-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \quad \left( \frac{2}{(x-1)(x+1)^2} \right)$$

$$9^{\circ}) \frac{108-52x}{x(3-x)^2} - \frac{4}{3-x} - \frac{12}{x} + \frac{(1+x)^2}{(3-x)^2} \quad (1)$$

$$10^{\circ}) \frac{(a+b)^2}{(x-a)(x+a+b)} - \frac{a+2b+x}{2(x-a)} + \frac{(a+b)x}{x^2+bx-a^2-ab} + \frac{1}{2} \quad (0)$$

$$11^{\circ}) \frac{3(x^2+x-2)}{x^2-x-2} - \frac{3(x^2-x-2)}{x^2+x-2} - \frac{8x}{x^2-4} \quad \left( \frac{4x}{x^2-1} \right)$$

## 2 — Rasyonel kesirlerde çarpma ve bölme:

Rasyonel kesirlerin çarpma ve bölmesi aritmetikte gördüğümüz cebirsel sayırlarda olduğu gibidir.

Kısaca : kesirler çarpılırken ; payların çarpımı pay, paydanın çarpımı payda olarak yazılır.  $\left( \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \right)$

Kesirler bölündürken ; ikinci kesir ters çevrilir birinci ile çarpılır.

$$\left( \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC} \right)$$

Bu bölümde aşağıdaki esaslara dikkat ediniz.

1°) Çarpma veya bölme işlemlerini yapmadan kesirlerin pay ve paydalarını çarpanlara ayırınız.

2°) Mümkün olan kısaltmaları yapınız.

3°) Çarpma ve bölmeye işaret kaidesine dikkat ediniz. Çarpının sıraya tabi olmadığını da düşününüz.

$$\begin{aligned} \text{Örnek 1 : } & \frac{2x}{5a^2} \cdot \frac{4b^2x^2}{6a^2y} \cdot \frac{10a^3y^3}{12b^2x^2} \\ & = \frac{2 \cdot 10 \cdot 4a^3b^2y^8x^2}{5 \cdot 12 \cdot 6a^4b^2x^4y} = \frac{2y^8}{9a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Örnek 2 : } & \frac{x+y}{x} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^3+xy^2} \cdot \frac{4x^2}{(x+y)^2} \\ & = \frac{x+y}{x} \cdot \frac{(x+y)(x-y)}{x(x^2+y^2)} \cdot \frac{4x^2}{(x+y)(x+y)} \\ & = \frac{4(x-y)}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\text{Örnek 3 : } \frac{a^3-b^3}{a^2-5ab+6b^2} \cdot \frac{a^3-4ab^2}{3a^2+3ab+3b^2} \cdot \frac{6a-18b}{7(a-b)^3}$$

Her kesrin pay ve paydasını çarpanlara ayıralım.

$$= \frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-2b)(a-3b)} \cdot \frac{a(a+2b)(a-2b)}{3(a^2+ab+b^2)} \cdot \frac{6(a-3b)}{7(a-b)(a-b)}$$

Pay ve paydadaki ortak çarpanları kısaltırsak,

$$= \frac{2a(a+2b)}{7(a-b)} \text{ bulunur.}$$

**Örnek 4 :**  $\frac{x^2 - 4a^2}{ax + 2a^2} : \frac{x - 2a}{2a}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^2 - 4a^2}{ax + 2a^2} \cdot \frac{2a}{x - 2a} \\ &= \frac{(x - 2a)(a + 2a)}{a(x + 2a)} \cdot \frac{2a}{x - 2a} \\ &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

**Örnek 5 :**  $\frac{x^3 - 1}{x^2 + x} \cdot \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 + x + 1} : \frac{(x - 1)^3}{x^2 + 2x + 1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x^3 - 1}{x^2 + x} \cdot \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{x^2 + 2x + 1}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Kesirlerin pay ve paydalarını çarpanlara ayıralım;

$$= \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x + 1)} \cdot \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1)}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{(x + 1)(x + 1)}{(x - 1)(x - 1)(x - 1)}$$

(pay ve paydadaki tek çarpanları kısaltalım;

$$= \frac{(x + 1)(x + 1)(x + 1)}{x} = \frac{(x + 1)^3}{x}$$

bultur.

Sorular:

1) Aşağıdaki çarpma işlemlerini yapınız;

- 1°)  $\frac{x^2y^3}{7az^3} \cdot \frac{7a^2z}{4x^2z}$
- 2°)  $\frac{ab^2c^3}{4d^4} \cdot \frac{3d}{5a^2b^3}$
- 3°)  $\frac{14x^2y^3}{15z^2} \cdot \frac{20z^3}{21x^3y^3}$
- 4°)  $\frac{5x^2y}{14a^3c} \cdot \frac{28a^2b^3}{15xy^2}$
- 5°)  $\frac{3x^2y^3}{8z^4} \cdot \frac{6y^2z^3}{5x^5} \cdot \frac{10a^2z^3}{9y^2}$
- 6°)  $\frac{12b}{25a} \cdot \frac{35ab}{48} \cdot \left(\frac{-5}{7b^2}\right)$
- 7°)  $\frac{x^2 - 9}{x^2 + x} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3}$
- 8°)  $\frac{xy - y^2}{2x + 2} \cdot \frac{4x + 4}{x^2 - xy}$
- 9°)  $\frac{4x^2 - 9}{9x^2 - 1} \cdot \frac{6x + 2}{12x - 18}$
- 10°)  $\frac{15x}{2x(2x - 1)} \cdot \frac{2x(x + 1)}{5x^2}$
- 11°)  $\frac{a^2 - 169}{a^2 - 64} \cdot \frac{a^2 - 8a}{a - 13}$
- 12°)  $\frac{4a^2 - 9b^2}{2a + 3b} \cdot \frac{1}{2a - 3b}$
- 13°)  $\frac{4x^2 - 1}{16 - x^2} \cdot \frac{4 - x}{1 - x}$
- 14°)  $\frac{x^3 - y^3}{(x - y)^2} \cdot \frac{3x - 3y}{6x}$
- 15°)  $\frac{5y}{x^3 + xy^2} \cdot \frac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3}$
- 16°)  $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 1} \cdot \frac{a + 1}{1 - a}$
- 17°)  $\frac{x^3 - y^3}{(y - x)^3} \cdot \frac{(x - y)^2}{x^2 + xy + y^2}$
- 18°)  $\frac{(x + y)^2 - 4}{x^2 - (y - 2)^2} \cdot \frac{3x - 3y + 6}{3x - 6}$

2) Aşağıdaki bölmeleri yapınız.

- 1°)  $\frac{21xy^2}{13z^3} : \frac{28x^3}{39z^4}$
- 2°)  $\frac{4a^3b}{3x^2y} : \left(\frac{4a^3b}{3xy}\right)$
- 3°)  $\frac{17a^4b^4}{7xy^2} : \frac{3a^4b^3}{14x^2y^2}$
- 4°)  $\frac{9x^2}{y^2} : x^2$
- 5°)  $\frac{a^2 + ab}{a^2 - ab} : \frac{a^3 + a^2b}{ab^2 + b^3}$
- 6°)  $\frac{a + 5b}{a^2 + 6ab} : \frac{ab + 5b^2}{a^3 + 6a^2b}$
- 7°)  $\frac{14x^2 - 7x}{12x^3 + 24x^2} : \frac{2x - 1}{x^2 + 2x}$
- 8°)  $\frac{a^2 - 121}{4a^2 - 1} : \frac{a + 11}{a^2 - 4} : \frac{a + 11}{a + 2}$
- 9°)  $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} : \frac{(a - b)^2}{2a}$
- 10°)  $\frac{6(ab - b^2)}{a(a + b)^2} : \frac{2b^2}{a(a^2 - b^2)}$
- 11°)  $\frac{a^2 - b^2}{c^2 - d^2} : \frac{a - b}{c + d}$
- 12°)  $\frac{a^2 - 4x^2}{a^2 + 4ax} : \frac{a^2 - 2ax}{ax + 4x^3}$

3) Aşağıdaki çarpma ve bölme işlemlerini yapınız.

- 1°)  $\frac{9a^2b}{8c^2x} \cdot \frac{28ax^2}{15b^2c} : \frac{21a^3x}{10bc^3}$
- 2°)  $\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(\frac{-9b^3}{3}\right) \cdot \frac{7a}{b}$
- 3°)  $\frac{3x^2 + x - 2}{4x^2 - 4x - 3} \cdot \frac{6x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 3}$
- 4°)  $\frac{a^3y - ax^2y}{a^3x^2 - a^2x^2y} : \frac{a^2y - 2axy + x^2y}{a^2 + ay}$
- 5°)  $\frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 1} : \frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 + 3x - 2}$
- 6°)  $\frac{x^2 + 3x + 2}{4x^2 - 9} : \frac{2x^2 + 11x + 5}{4x^2 - 1}$
- 7°)  $\frac{x^2 - x - 20}{x^2 - 25} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8} : \frac{x + 1}{x^2 + 5x}$
- 8°)  $\frac{x^2 - 8x - 9}{x^2 - 17x + 72} \cdot \frac{x^2 - 25}{x^2 - 1} : \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 9x + 8}$
- 9°)  $\frac{a^3 + 8}{2a - 6} \cdot \frac{a^2 - 9}{a^2 + 3a + 2} : \frac{3a^2 - 6a + 12}{5a + 5}$
- 10°)  $\frac{x^3 - y^3}{x^2 - xy - 2y^2} \cdot \frac{x^2 - 4y^2}{5x^2 + 5xy + 5y^2} : \frac{x^2 + xy - 2y^2}{x^3 + y^3}$
- 11°)  $\frac{a^2 - 7ab + 10b^2}{a^2 - 6ab + 5b^2} \cdot \frac{a^2 - 4ab + 3b^2}{25b^2 - a^2} : \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{5b^2 - 4ab - a^2}$
- 12°)  $\frac{(a+b+c)^2}{a^2b^2c^2} \cdot \frac{a^2bc + ab^2c - abc^2}{a^2 + 2ab^2 + b^4} : \frac{(a+b)^2 - c^2}{a^2 - b^4}$
- 13°)  $\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a + 7ab + 6b^2} \cdot \frac{a + 2b}{a^2 + ab + ac} : \frac{a + b - c}{2a^2 - 5ab - 12b^2}$

4) Aşağıdaki çarpma ve bölme işlemlerini yapınız:

(Sonuçları kontrol ediniz).

- 1°)  $\frac{4x^2 + x - 14}{6xy - 14y} \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{x - 2}{4x - 7} : \frac{2x^2 + 4x}{3x^2 - x - 14}$  (C :  $\frac{x}{y}$ )

$$2^{\circ}) \frac{x^2+x-2}{x^2-x-20} \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2-x} : \left( \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-15} \right) \cdot \frac{x+3}{x^2} \quad (\text{x})$$

$$3^{\circ}) \frac{4x^2+16x+15}{2x^2+3x+1} \cdot \frac{x^2-6x-7}{2x^2-17x+21} \cdot \frac{4x^2-1}{4x^2-20x+25}$$

$$4^{\circ}) \frac{x^4-8x}{x^2-4x-5} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^3-x^2-2x} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x-5}$$

$$5^{\circ}) \frac{(a+b)^2-c^2}{a^2+ab-ac} \cdot \frac{a}{(a+c)^2-b^2} \cdot \frac{(a-b)^2-c^2}{ab-b^2-bc}$$

$$6^{\circ}) \frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2-b^2-c^2-2bc} \cdot \frac{a^2-2ac+c^2-b^2}{b^2-2bc+c^2-a^2}$$

$$7^{\circ}) \frac{x^2-64}{x^2-24x+128} \cdot \frac{x^2+12x-64}{x^3-64} : \frac{x^2-16x+64}{x^2+4x+16}$$

$$8^{\circ}) \frac{(a^2+ax)^3}{a^2-x^2} \cdot \frac{(a-x)^2}{a^5+a^2x^3} \cdot \frac{a^2-a}{a^3+2a^2x+ax^2}$$

$$9^{\circ}) \frac{x^3+4x^2y+4xy^2}{3x^2y-5xy^2-2y^3} \cdot \frac{xy^2}{9x^2-3xy+y^2} : \frac{(x+2y)^3}{27x^3+y^3}$$

$$10^{\circ}) \frac{1+8x^3}{(2-x)^2} \cdot \frac{4x-x^3}{1-4x^2} : \frac{(1-2x)^2+2x}{2-5x+2x^2}$$

$$11^{\circ}) \frac{x^2(x-4)^2}{(x+4)^2-4x} \cdot \frac{64-x^3}{16-x^2} : \frac{(x^2-4x)^3}{(x+4)^2}$$

$$12^{\circ}) \frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b+c)^2} : \frac{a^2+ab+ac}{(a-c)^2-b^2} : \frac{a^2-ab+ac}{(a-b)^2-c^2}$$

$$13^{\circ}) \frac{a^4-x^4}{a^2-2ax+x^2} : \left( \frac{a^2x+x^3}{a^3-x^3} \cdot \frac{a^4+a^2x^2+x^4}{a^2x-a^2x^2+x^3} \right) \quad (a+x)$$

### 3 - Rasyonel kesirlerin dört işlemi üzerine örnekler:

Aşağıdaki genel örnekleri inceleyiniz.

$$\text{I} - \frac{A}{B} = A : \frac{B}{C} = A \cdot \frac{C}{B} = \frac{AC}{B} \quad \left( \text{özel hal: } \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{II} - \frac{A}{B} = \frac{A}{B} : C = \frac{A}{B} \cdot \frac{1}{C} = \frac{A}{BC} \quad \left( \text{»} \quad \frac{a}{b} = ab \right)$$

$$\text{III} - \frac{A}{B} = \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC} \quad \left( \text{»} \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \right)$$

$$\frac{a+x}{b}$$

**Örnek 1 :**  $\frac{b}{a^2-x^2}$  Kesrini kısaltınız.

$$= \frac{ab(a+x)}{b(a^2-x^2)} = \frac{ab(a+x)}{b(a+x)(a-x)} = \frac{a}{a-x}$$

$$\text{Örnek 2 : } \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{\frac{a}{b} - \frac{b}{c} + \frac{c}{a}} \text{ kesrini kısaltınız,}$$

pay ve paydadaki ifadelerin paydalarını eşitliyelim :

$$= \frac{\frac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc}}{\frac{a^2c-ab^2+bc^2}{abc}} = \frac{a^2c+ab^2+bc^2}{abc} \cdot \frac{abc}{ac^2-ab^2+bc^2} = \frac{a^2c+ab^2+bc^2}{ac^2-ab^2+bc^2}$$

$$\text{Örnek 3 : } \frac{1}{x+\frac{1}{1-\frac{3}{x-2}}} \text{ kesrini kısaltınız.}$$

Aşağıdaki işlemi takibediniz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+\frac{1}{1-\frac{3}{x-2}}} &= \frac{1}{x+\frac{1}{x-5}} = \frac{1}{x+\frac{x-2}{x-5}} \\ &= \frac{1}{\frac{x^2-4x-2}{x-5}} = \frac{x-5}{x^2-4x-2} \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

$$\text{Örnek 4 : } \frac{9x^2-64}{x-1-\frac{1}{1-\frac{x}{4+x}}} \text{ kesrini sısaltınız.}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9x^2-64}{x-1-\frac{1}{\frac{4+x-x}{4+x}}} = \frac{9x^2-64}{x-1-\frac{4+x}{4}} = \frac{9x^2-64}{3x-8} \\ &= \frac{4(3x+8)(3x-8)}{(3x-8)} = 4(3x+8) \end{aligned}$$

bulunur

$$\text{Örnek 5 : } \left( \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} \right) \cdot \left( \frac{3}{4x} + \frac{x}{4} - x \right) \text{ ifadesini sısaltınız.}$$

Her çarpanın paydalarını eşitleyiniz.

$$\begin{aligned} &= \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)} \cdot \frac{3+x^2-4x^2}{4x} \\ &= \frac{4x}{1-x^2} \cdot \frac{3-3x^2}{4x} = 3 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

**Sorular:**

1) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.

$$1^{\circ}) \frac{1+\frac{x}{2}}{\frac{4}{x}-x}$$

$$2^{\circ}) \frac{2-\frac{1}{x}}{4-\frac{1}{x^2}}$$

$$3^{\circ}) \frac{x-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$$

$$4^{\circ}) \frac{\frac{ab}{c}-2d}{\frac{a-2cd}{b}}$$

$$5^{\circ}) \frac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a-1}}$$

$$6^{\circ}) 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{a}}$$

$$7^{\circ}) \frac{2x-\frac{1}{4x^3}}{1-\frac{1}{2x}}$$

$$8^{\circ}) 3 - \frac{x-1}{2x\frac{5x}{3}}$$

$$9^{\circ}) 3 - \frac{1}{a-\frac{a^2}{x+1}}$$

$$10^{\circ}) \frac{\frac{4}{x-1} + \frac{a-1}{a}}{\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}}$$

$$11^{\circ}) \frac{\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}}{\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}}$$

2) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.

$$1^{\circ}) \frac{2}{1-x^2} : \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) \quad 2^{\circ}) \left( \frac{a^3-b^3}{a-b} - \frac{a^3+b^3}{a+b} \right) : \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$3^{\circ}) \left( \frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} \right) : \left( \frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x} \right)$$

$$4^{\circ}) \left( y + \frac{xy}{y-x} \right) \left( y - \frac{xy}{x+y} \right) : \frac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$$

$$5^{\circ}) \frac{a}{4} \left( \frac{2}{a-b} - \frac{2}{a+b} \right) : \frac{a^2-b^2}{a^3b+ab^3} : \frac{1}{a^2+b^2}$$

$$6^{\circ}) 2 \left( \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) - \frac{2}{x^2-5x+6}$$

$$7^{\circ}) \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a-b} \right) + \frac{b}{a+b} - \frac{b}{2} \left( \frac{2a-2b-1}{a^2-b^2} \right)$$

$$8^{\circ}) \frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{b}{a-b} - \frac{b^2}{a^2-b^2} : \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$9^{\circ}) \left( \frac{a}{x} + \frac{x}{a} - 2 \right) \left( \frac{a}{x} + \frac{x}{a} + 2 \right) : \left( \frac{a}{x} - \frac{x}{a} \right)^2$$

$$10^{\circ}) \left[ 1 - \left( \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy} \right)^2 \right] : \left[ \left( \frac{x^2+z^2-y^2}{2xz} \right)^2 - 1 \right]$$

3) Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız. (Sonuçları karşılaştırınız).

$$1^{\circ}) \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{x+1}{3-x}}} \quad ( \quad ) \quad \left( \frac{4}{3+3x} \right)$$

$$2^{\circ}) \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x+\frac{2x^2}{1-x}}}$$

$$\frac{1+x^2}{x^2-x-2}$$

$$3^{\circ}) \frac{a}{1+\frac{a}{b}} - \frac{b}{1-\frac{b}{a}} - \frac{2}{\frac{1}{a}-\frac{a}{b^2}}$$

$$(C : 0)$$

$$4^{\circ}) \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x-1}{3} - \frac{7x-4}{6}}{\frac{13}{6}(x+1) - \frac{x}{3} - 2\frac{1}{2}}$$

$$(C : 1)$$

$$5^{\circ}) \left( \frac{2x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{y^2}{x^2-y^2} \right) : \left( \frac{1}{x+y} + \frac{x}{x^2-y^2} \right)$$

$$(C = x)$$

$$6^{\circ}) \frac{1}{x^2 - \frac{x^3-1}{x+\frac{4}{1+x}}}$$

$$(C : \frac{x}{y})$$

$$7^{\circ}) \frac{\frac{x^2}{y^2} \left( 1 + \frac{y}{x} \right)^2 - \left( \frac{x}{y} + 1 \right)}{\frac{x^2}{y^2} \left( 1 + \frac{y}{x} \right)^2 - \frac{x}{y} \left( \frac{x}{y} + 1 \right)}$$

$$(C : \frac{(x+y)^2}{(x-y)})$$

$$8^{\circ}) \frac{x^2}{\frac{x^2+y^2}{x+y} - y} - \frac{y^2}{\frac{x^2+y^2}{x+y} - x}$$

$$9^{\circ}) \left( 1 + \frac{2a}{b^2-a} \right) \left( 1 + \frac{3a}{b^2-a} \right) \left( 1 + \frac{a}{b-2a} \right) \left( 1 - \frac{a}{b+2a} \right)$$

$$(C : 1)$$

$$10^{\circ}) \frac{\left( 1 + \frac{c}{a+b} + \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) \left( 1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right)}{\left( 1 - \frac{c^3}{(a+b)^3} \right) \left( 1 + \frac{c}{a+b} \right)}$$

$$(C : \frac{1}{x^3})$$

$$11^{\circ}) \frac{\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}}$$

$$(C : \frac{a-c}{1+ac})$$

$$12^{\circ}) \left( \frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} \right) : \left[ 1 - \frac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)} \right]$$

$$13^{\circ}) \frac{1 + \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a-b}{a+b}} : \frac{1 + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}$$

$$(C : \frac{b}{a})$$

$$14^{\circ}) \frac{\frac{2x^2+2x}{x} - \frac{3}{2}}{\frac{x}{x-2} - 1} - \frac{\frac{3(x-1)}{x}}{\frac{x}{x-4} + \frac{3}{4}}$$

$$(C : 4)$$

$$15^\circ) \quad \frac{2x^4v}{4x - 2 - \frac{1}{1 + \frac{2x-1}{1 + \frac{1}{4x-1}}}}$$

(C :  $8x^2-1$ )

$$16^\circ) \quad \frac{x^2}{1 - \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}} - \frac{x^2-2}{1 - \frac{1}{x^2 - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}}$$

(C :  $2x^2$ )

$$17^\circ) \quad \left( \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} - \frac{10a^2-13ab-3b^2}{10a^2-3ab-b^2} - \frac{2a^3+ab^2+ab+b^2}{2a^2+ab-b^2} \right) : \frac{ab-b^2-2a+2b}{2a-b}$$

(C : 1)

$$18^\circ) \quad \frac{\left[ \frac{(a+b)^2}{4ab} - 1 \right] \left[ \frac{(a-b)^2}{4ab} + 1 \right] [(a+b)^2-ab] [(a-b)^2+ab]}{[(a+b)^3-3ab(a+b)] [(a-b)^3+3ab(a-b)]} \quad (\text{C : } \frac{a^2-b^2}{16a^2b^2})$$

$$19^\circ) \quad \frac{\left[ \frac{(a+b)^3}{3ab} - a - b \right] \left[ \frac{(a-b)^3}{3ab} + a - b \right] [(b-a)^3 - (b-a)(a^2+ab+b^2)]}{\left[ \frac{(a+b)^2}{4ab} - 1 \right] [(a+b)^2-ab] [(a+b)^3-3ab(a+b)]} \quad (\text{C : } \frac{4}{3})$$

$$20^\circ) \quad \left[ \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^3+b^3} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) : \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \right] : \frac{(a+b)^2-ab}{(a-b)^2+ab} \quad (\text{C : } \frac{a-b}{ab})$$

$$21^\circ) \quad \left[ \frac{b + \frac{a-b}{1+ab}}{1 - \frac{b(a-b)}{1+ab}} - \frac{a - \frac{a-b}{1-ab}}{1 - \frac{a(a-b)}{1-ab}} \right] : \left( \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \quad (\text{C : } \frac{ab}{a+b})$$

$$22^\circ) \quad \frac{a + \frac{b-a}{1+ab}}{1 - \frac{a(b-a)}{1+ab}} \cdot \frac{\frac{x+y}{1-xy} - y}{1 + \frac{y(x+y)}{1-xy}}$$

(C : bx)

$$23^\circ) \quad \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x}} : \frac{\frac{1}{x}}{x-1 + \frac{1}{x}}$$

(C : 1)

$$24^\circ) \quad \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1} \cdot \frac{1 + \frac{y}{x}}{x-y} : \frac{1 + \frac{y^3}{x^3}}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x}}$$

(C : 1)

$$25^\circ) \quad \frac{\frac{1}{x} - \frac{x+a}{x^2+a^2}}{\frac{1}{a} - \frac{a+x}{a^2+x^2}} + \frac{\frac{1}{x} - \frac{x-a}{x^2+a^2}}{\frac{1}{a} - \frac{a-x}{a^2+x^2}}$$

(C : 0)

$$26^\circ) \quad \frac{\left( \frac{3x+x^3}{1+3x^2} \right)^2 - 1}{\frac{3x^2-1}{x^3-3x} + 1} : \frac{\frac{9}{x^2} - \frac{33-x^2}{3x^2+1}}{\frac{3}{x^2} - \frac{2(x^2+3)}{(x^3-x)^2}}$$

(C :  $\frac{x(x+1)}{x^2+4x+1}$ )

$$27^\circ) \quad \frac{\frac{x-1}{3} + \frac{x-1}{x-2}}{\frac{x+2}{4} + \frac{x+2}{x-3}} : \frac{\frac{x+3}{7} - \frac{x-3}{x+4}}{\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{x-1}}$$

(C :  $\frac{28(x+4)}{9(x+3)}$ )

$$28^\circ) \quad \frac{x-2 + \frac{6}{x+3}}{x-4 + \frac{12}{x+3}} : \frac{\frac{x+3}{4} - \frac{x+3}{x+1}}{\frac{x-3}{7} + \frac{x-3}{x-4}}$$

(C :  $\frac{7(x-4)}{4(x-1)}$ )

## ORAN VE ORANTI

### 1 — Oran :

a ve b sayılarını düşünelim:  $\frac{a}{b}$  bölümüne, a sayısının b ye olan oranı denir. Bu bölüm tam sayı veya kesir olabilir. Genel olarak:

$$\frac{a}{b} = k$$

şeklinde gösterilir. a nin b ye oranı eşit k diye okunur,

Üst terim  $\leftarrow \frac{a}{b} = k \rightarrow$  oran değeri  
Alt terim  $\leftarrow \frac{a}{b} = k \rightarrow$  oran değeri

Yukarıdaki tarife göre, yalnız aynı cinsten iki kemyetin oranından bahsedilebilir. Meselâ: 2 km nin 3000 m ye oranı:

$$\frac{2 \text{ km}}{3000 \text{ m}} = \frac{2000 \text{ m}}{3000 \text{ m}} = \frac{2}{3}$$

Görlüyor ki,  $\frac{a}{b}$  oranı daima adsız bir sayıdır.

### 2 — Oranti :

Eşit olan iki oranın eşitlik işaretiyile birbirine bağlanmasıyle bir oranti elde edilir.

$$\frac{a}{b} = k \text{ ve } \frac{c}{d} = k \text{ ise}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

orantisı yazılabilir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  orantısında: a, b, c, d ye orantının 1inci, 2nci, 3üncü, 4üncü terimleri; a ve d ye yan terimler veya sadece yanlar; b ve c ye orta terimler veya sadece ortalar denir.

### 3 — Orantılarda özellikler :

a) Bir orantıda: ortalar çarpımı yanlar çarpımına eşittir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ise } a \cdot d = b \cdot c \text{ olur.}$$

Verilen orantının her iki tarafını b, d ile çarparsak:

$$\frac{a}{b} \cdot bd = \frac{c}{d} \cdot bd$$

$$\boxed{a \cdot d = c \cdot b}$$

elde edilir. (Bu özellik orantının ana özelliği)

Karşıt olarak, her tarafı ikişer çarpanla,  $a \cdot d = b \cdot c$  şeklinde bir eşitlik ab dc gibi bir oranti olarak düşünülebilir.

Netice :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  orantısında:

1. Ortaların yerleri değiştirilirse oranti bozulmaz:  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
2. Yanların yerleri değiştirilirse oranti bozulmaz:  $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$
3. Her iki oranın üst terimleri aynı zamanda kendi alt terimleri ile değiştirilebilir:  $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$
4. Orantının sağ tarafı sol, sol tarafı sağ yazılabılır:  $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ .

5. Bir orantıda bir yanındaki oranın her terimi bir sayı ile çarpılır veya bölündürse orantı bozulmaz:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{c}{a} \text{ veya } \frac{a:n}{b:n} = \frac{c}{d}$$

SORU:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ve  $\frac{e}{f} = \frac{g}{h}$  orantıları varsa, aşağıdaki orantıların yazılabileceğini gösteriniz:

1.

$$\frac{a \cdot e}{b \cdot f} = \frac{c \cdot g}{d \cdot h}$$

2.

$$\frac{a:e}{b:f} = \frac{c:g}{d:h}$$

Not: Bir orantıda iç terimler veya dış terimler birbirine eşit olursa, eşit olan terime ötekilerin orta orantılısı veya geometrik ortası denir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{a} \text{ veya } a^2 = b \cdot c$$

b)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  orantısında, dört terimden üçü bilinen sayılar ise, bilinmiyen terim ana özellik yardımı ile bulunabilir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \rightarrow ax = bc \rightarrow x = \frac{bc}{a}$$

Örnek:

$$\frac{3}{8} = \frac{6}{x} \text{ den } 3x = 6 \times 8, x = 16$$

Aşağıdaki orantılarda bilinmiyen terimi bulunuz:

$$\frac{5}{10} = \frac{4}{x}; \frac{15}{2} = \frac{30}{x}; \frac{12}{x} = \frac{3}{2}; \frac{6}{x} = \frac{24}{8}; \frac{x}{15} = \frac{1}{4}; \frac{2}{5} = \frac{x}{20}$$

c)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$  ise:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

ve

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

olur.

$$\begin{aligned} a &= bk \\ b &= b \end{aligned}$$

$$a+b = b(k+1)$$

$$\begin{aligned} c &= dk \\ d &= d \end{aligned}$$

$$c+d = d(k+1)$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \text{ bulunur.}$$

d)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ise:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

ve

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

olur.

Bu orantıların doğruluğunu  $c$  de olduğu gibi gösteriniz:

Not:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  orantısının her iki tarafına bir ekleyip çıkararak yukarıdaki neticeleri bulunuz.

$$\frac{a}{b} \mp 1 = \frac{c}{d} \mp 1$$

e)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ise:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

ve

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}$$

yazılabilir.

Bu orantıların doğruluğunu yukarıda görüldüğü gibi sağlayınız.

Örnek:  $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$  orantısında:

$$1. \frac{6+4}{6} = \frac{3+2}{3} \rightarrow \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$2. \frac{6+4}{4} = \frac{3+2}{2} \rightarrow \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$3. \frac{6-4}{6} = \frac{3-2}{3} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$4. \frac{6-4}{4} = \frac{3-2}{2} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$5. \frac{6+4}{6-4} = \frac{3+2}{3-2} \rightarrow \frac{10}{2} = \frac{5}{1}$$

$$6. \frac{6-4}{6+4} = \frac{3-2}{3+2} \rightarrow \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

f)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ise ( $m, n$  sıfırdan farklı olmak üzere):

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m \cdot a + n \cdot c}{mb + nd} \text{ yazılabilir.}$$

$$m = n = 1 \text{ ise } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{ olur.}$$

Örnek:  $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$  orantısı ( $m = 2, n = 3$ ):

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{2 \cdot 2 + 4 \cdot 3}{2 \cdot 5 + 10 \cdot 3} = \frac{16}{40}$$

#### 4 — Çok terimli orantılar:

Birbirine eşit birçok oranların aralarına (=) işareti konmakla çok terimli bir orantı elde edilir :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{24}{32} = \frac{15}{20} \text{ gibi}$$

Bunu  $3 : 6 : 24 : 15 = 4 : 8 : 3 : 20$  şeklinde de yazabiliz.

Genel olarak çok terimli orantı :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k \text{ şeklinde gösterilir.}$$

Çok terimli bir orantıda, üst terimler toplamının alt terimler toplamına oranı, herhangibir üst terimin kendi alt terimine oranına esittir.

$$k = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$$

Hakikaten :

$$a = b \cdot k$$

$$c = d \cdot k$$

$$e = f \cdot k$$

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = (b+d+f+\dots)k$$

$$\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = k \text{ bulunur.}$$

Örnek :

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{15}{25} = \frac{3+6+15}{5+10+25} = \frac{24}{40} \text{ olur.}$$

SORU:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{am+cn+et}{bm+dn+ft} \text{ yazılabileceğini gösteriniz.}$$

**SORULAR :**

1 — Aşağıdaki orantıların doğru olup olmadıklarını araştırınız:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} ; \quad \frac{5}{15} = \frac{20}{20} ; \quad \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$$

$$\frac{777}{111111} = \frac{5}{429} ; \quad \frac{11}{111111} = \frac{1221}{123321}$$

2 — Aşağıdaki eşitliklerden mümkün olan orantıları yazınız:

$$9 \cdot 18 = 8 \cdot 18 ; \quad 6 \cdot 35 = 15 \cdot 14 ; \quad 5 \cdot 18 = 9 \cdot 10$$

$$ax = by ; \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{16} \cdot \frac{2}{3} ; \quad 10^2 = 5 \cdot 20$$

3 — Aşağıdaki orantılardan x'i hesaplayınız:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{x} ; \quad \frac{4}{x} = \frac{5}{6} ; \quad \frac{x}{5} = \frac{7}{10}$$

$$3 : \frac{2}{3} = \frac{x}{4} : 2 ; \quad 1 : \frac{4}{x} = \frac{5}{6} ; \quad \frac{12,5}{2,8} = \frac{x}{12,6}$$

$$a^2 b : c = \frac{ab}{c} : \frac{x}{2a} ; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{x} : d$$

$$29(a+b) : x = 551(a^2 - b^2) : 19(a-b) \\ (a^3 + 1) : (a^2 - a + 1) = (a^2 - 1) : x$$

4 — Aşağıda verilen üç sayı ile orantı yapacak dördüncü sayıyı bulunuz:

$$2; 3; 4 \quad 5; 6; 15 \quad 12; 8; 9 \quad a; b; c$$

5 — Aşağıda verilen çok terimli orantılardan bilinmeyenleri bulunuz:

$$7 : 5 : 2 = x : y : 6$$

$$10 : 8 : x = 5 : y : 2$$

$$x : 18 : y = 5 : 9 : 6$$

$$x : y : z : 30 = 3 : 4 : 5 : 6$$

6 — 490 sayısını 1; 2; 4 sayılarıyla orantı üç parçaya ayırınız.

7 — 240 sayısını 1; 2; 3; 4; 5 ile orantılı parçalara ayırınız.

8 — 1000 sayısını 6:5:4:3:2 oranına bölünüz.

9 — 48 sayısını 2:3:3,5:4 oranına bölünüz.

10 — Aşağıdaki orantılardan x'i bulunuz:

$$\text{Örnek: } \frac{3+x}{x} = \frac{5}{3} \rightarrow \frac{8+x-x}{x} = \frac{5-3}{3}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow 8 \cdot 3 = 2x \rightarrow x = 12$$

$$1^\circ) \quad \frac{(4-x)}{x} = \frac{2}{5} ; \quad 4^\circ) \quad \frac{a-x}{x} = \frac{b}{c}$$

$$2^\circ) \quad \frac{7-x}{7+x} = \frac{2}{5} ; \quad 5^\circ) \quad \frac{a+x}{a-x} = \frac{b}{c}$$

$$3^\circ) \quad \frac{3x+5}{3x} = \frac{13}{13} ; \quad 6^\circ) \quad \frac{a+mx}{a-mx} = \frac{b}{c}$$

11) 15 işçi 6 gün çalışarak bir kanalizasyon işini yaptılar. Aynı işi 40 işçi kaç günde yapar?

12) 7 ve 9 yaşlarında iki kardeş 192 lirayı yaşları ile orantılı olarak paylaşıyorlar. Her birine düşen parayı bulun.

13) Birisi  $8\frac{1}{2}$  gün diğer 10  $\frac{1}{4}$  gün bir işte çalışan iki işçi 99 lira alıyorlar. Her birine düşen parayı bulunuz.

14) Bir adam günde 8 saat yakmak üzere 45 gün için elektrik mərafı olarak 95 lira vermiştir. Bu adam günde 5 saat yakmak üzere 84 günde kaç kuruş vermesi gereklidir?

## BÖLÜM V

## Denklemler

## A — Tarif ve Özellikler:

1 — Tarif : İçinde bilinmeyen bulunan ve bu bilinmeyenin özel değerleri için gerçeklenebilen eşitliklere denklem denir.

$$2x - 1 = x + 2$$

Şeklinde iki ifadenin eşitliğisi düşünelim. Burada ( $x$ ) se yalnız 3 değerini verirse eşitlik sağlanabilir. ( $x$ ) in başka hiç bir değeri içine eşitlik sağlanamaz.

Bir denklemi gerçekleyen bu özel değerlere denklemin kökleri denir. Yukarıda denkemin köklerini bulmak için yapılan işlemlere denklemin çözümü denir.

Not : İki ifadenin arasına ( $=$ ) işareti konmakla her zaman bir denklem elde edilmez. Nitelik ;

a — Bir eşitliğin iki tarafında bulunan bilinmeyenlere ne değer verirse de verelim eşitlik sağlanıyorsa bu çeşit eşitliklere özdeşlik denir.

Örnek :  $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{gibi}$$

b — Bazen, herhangi iki ifde arasına ( $=$ ) işaretinin konması hiç bir mana ifade etmez. Meselâ :

$$x + 3 = x - 1$$

şeklinde verilen, iki ifadenin eşitliği mümkün olmaz. Hakikaten, bir sayının 3 fazlası hiç bir zaman (1) ekisine eşit olamaz. Bu türlü denklemle karşılaşılırsa buna, mümkün olmayan denklem denir.

c — Bazı denklemlerde çözüm işlemlerinden sonra ( $0 = 0$ ) şeklinde bir sonunca rastlanır. Böyle çıkacak denklemlere belirsiz denklemler denir.

Meselâ :  $10(x + 1) - 6(2x + 1) + 5(x + 4) = 3(x + 8)$  denkleminde,

$$10x + 10 - 12x - 6 + 5x + 20 = 3x + 24$$

$$10x - 12x + 5x - 3x = 10 + 6 - 20 + 24$$

$$0 \cdot x = 0 \quad \text{bulunur.}$$

Bu denklem belirsizdir. ( $x$ ) in her değeri denklemi sağlar.

2 — Bilinmeyenleri çok zaman  $x, y, z, \dots$  gibi harflerle gösteririz. Diğer harflerle de bilinen kemiyetler gösterilir.

a) Denklemler, içiade bulunan bilinmeyenin sayısına göre, bir bilinmeyenli, iki bilinmeyenli, üç bilinmeyenli, ... denklem adını alır.

$x + 3 = 2 - 5x \dots$  Bir bilinmeyenli denklem.

$x + 3y = 1 \dots$  İki  $\rightarrow$  "

$x + 2y + 3z = 2 \dots$  Üç  $\rightarrow$  "

.....

b) Denklemler; İçindeki bilinmeyenlerin kuvvetlerine göre birinci dereceden, ikinci dereceden, ... denklem adını alırlar.

$x - 2x = 5 + x \dots$  Bir bilinmeyenli birinci derece

$x^2 - 4x + 3 = 0 \dots$  Bir bilinmeyenli ikinci  $\rightarrow$

$x + y = 4 \dots$  İki  $\rightarrow$  birinci derece

$x^2 + 3y - 1 = 0 \dots$   $\rightarrow$  ikinci derece denklem.

c) Bir denklemde, bilinmeyenden başka kemiyetler sayı ise, bu çeşit denklemlere Nümerik denklemler, kemiyetler içinde harfler varsa Harfli denklemler denir.

$2x - 3 = 5 \dots$  Nümerik denklem

$3ax - 2b = 4 \dots$  Harfli denklem.

## 3 — Denlemlerin çözümü :

Bir denklemi çözümü için aşağıdaki prensipleri göz önünde tutmalıdır.

## 1. nci prensip :

Bir denklemi her iki tarafına aynı kemiye veya ifade eklenebilir, veya her iki taraftan çıkarılabilir.

a) Bir denklemi bir tarafında bulunan bir terim, işaret değiştirerek denklemi öbür tarafına geter.

Meselâ :  $2x - 3 = 5$  denkleminin her iki tarafına 3 eklersek (prensip 1)

$$2x - 3 + 3 = 5 + 3.$$

$$2x = 5 + 3 \quad \text{olur.}$$

Görülüyorki, birinci tarafta bulunan  $-3$  terimi diğer tarafa  $+3$  olarak geçmiş oldu.

b) Bir denklemi her iki tarafından işaret ve değerce birbirine eşit iki kemiye silinebilir. Meselâ :

$$x + 3x - 5 = 4 + 3x$$

denkleminin her iki tarafında  $3x$  i çıkarırsak (prensip 1)

$$x + 3x - 5 - 3x = 4 + 3x - 3x$$

$$x - 5 = 4$$

bulunur. Bu da bize her iki taraftan  $3x$  in kaldırılabilceğini gösterir.

c) Bir denklemin bir tarafında bulunan terimlerin hepsi diğer tarafa atılarak denklem sıfır eşit yapılıbilir.

$$x^2 - 3x = 5 \text{ denklemi}$$

$x^2 - 3x - 5 = 0$  şeklinde yazabiliriz.

### II nci prensip:

Bir denklemin her iki tarafı aynı sayı ile (sıfırdan farklı) çarpılabilir veya bölünebilir.

Örnek : 1)  $3x = 12$

denkleminin her iki tarafını 3 e bölersek :

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad \text{veya} \quad x = 4 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : 2)  $x^2 + 4x = x^2 + 8$

denkleminde her iki taraftan  $x^2$  yi silibiliriz.

$$4x = 8$$

kalır. Her iki tarafı 4 e bölersək

$$x = 2 \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : 3)  $\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{3}$

denkleminin her iki tarafını 6 ile çarpalım. (prensip 1)

$$\frac{6x}{2} - 18 = \frac{6x}{3}$$

$$3x - 18 = 2x$$

$$3x - 2x = 18$$

$$x = 18 \quad \text{bulunur.}$$

Netice : Bir denklemin bütün terimlerinin işaretini değiştirse denklem bozulmaz

$$x - 3 = 8 - 3x$$

denklemi,

$$-x + 3 = -8 + 3x$$

şeklinde yazılabilir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümü

### B — Basit denklemler:

Örnek :  $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 6$  denklemini çözüyük.

Çözümü :

bilinenler bir tarafa bilinmeyenler bir tarafa atılır.

$$7x - 8x + 4x = -9 + 6 + 6$$

her iki tarafta toplama yapılır ;

$$3x = 3$$

her iki taraf 3 e bölünür :

$$x = 1 \quad \text{bulunur.}$$

### Sorular :

1°)  $9x = 7x + 15 + 5x + 8 - 10x$

2°)  $2x - 9 + 8x + 10 = 15 + 5x - 7$

3°)  $7x - 6 + 5x - 4 + 3x - 2 + x = -4$

4°)  $-8 = 7 - 6x - 11 - 4x - 5 - 2x + 1$

5°)  $12x - 10 + 8x - 6 + 4x - 2 = 0$

6°)  $x - 3 + 6x - 9 + 12x - 15 = 2$

7°)  $3x + 2 + 5x + 3 + 7x + 9 = x$

8°)  $7 - 5x + 10 + 8x - 7 + 3x = x$

9°)  $6 + 12x - 9 - 8x + 10 + x = 0$

10°)  $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$

11°)  $13 + 12x + 11 - 10x - 11 - 12x - 13 = 0$

### C — Parantezli denklemler:

1°) Önünde (-) işaretli bulunan parantezleri açarken parantez içindeki terimlerin işaretleri değiştiriniz.

2°) Önce büyük parantez içindeki küçük parantezleri açınız.

Örnek :  $3x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x - 3)] = 10$

Çözümü : Büyük parantez içindeki parantezler açılır.

$$5x - (3x - 7) - (4 - 2x - 6x + 3) = 10$$

Parantezler açılır :

$$5x - 3x + 7 - 4 + 2x + 6x - 3 = 10$$

Bilinenler birtarafa bilinmeyenler birtarafa atılır :

$$5x - 3x + 2x + 6x = 10 + 3 + 4 - 7$$

her iki tarafta toplama yapılır :

$$10x = 10$$

her iki taraf 10 a bölünür :

$$x = 1 \quad \text{bulunur.}$$

**Sorular :**

$$1^{\circ} \quad 7v = 59 - (12x + 21)$$

$$2^{\circ} \quad 6x - (11x - 10) = 87 - (21 + 13x)$$

$$3^{\circ} \quad 15x - (21x - 63) = 163 - (30 - 75)$$

$$4^{\circ} \quad 4x^2 - (5x^2 - 17x - 12) - 64 = 2x - 8 - (x^2 + x - 20)$$

$$5^{\circ} \quad x - 3 - [x - (3+x)] = 5 \quad 6^{\circ} \quad 5x - (3x - 7) - [4 - 2x - (6x - 3)] = 10$$

$$7^{\circ} \quad 14x - (5x - 9) - [4 - 3x - (2x - 3)] = 30$$

$$8^{\circ} \quad 25 - 19 - [3 - (4x - 5)] = 3x - (6x - 5)$$

$$9^{\circ} \quad 22x - [3 - (3x - 2)] = 2x - (4x - 3) \quad 10^{\circ} \quad 2x - [3x - (4x - 9)] = 66$$

D — İçinde çarpmaya işlemi bulunan denklemler:

1<sup>o</sup>) Önce parantez içinde kalmak şartıyla çarpmaya işlemlerini yapınız.

2<sup>o</sup>) Sonra parantezleri açarak denklemi çözünüz;

$$\text{Örnek : } 1 \quad 6(5x - 2) - 5(6x - 5) = 4(9 - 2x) + 1$$

**Çözümü :**

Çarpımlar yapılır ;

$$30x - 12 - 30x + 25 = 36 - 8x + 1$$

bilinenler bir tarafa, bilinmeyenler diğer tarafa geçirilir.

$$30x - 30x + 8x = 36 + 1 - 25 + 12$$

her iki tarafta toplama yapılır,

$$8x = 24$$

her iki taraf, ve 8 e bölünürse,  $x = 3$  bulunur.

$$\text{Örnek : } 2 \quad 2(x - 4) - (x^2 + x - 20) = 4x^2 - (5x + 3)(x - 4) - 64$$

denklemi çözünüz,

**Çözümü :**

çarpımlar yapılır;  $2x - 8 - (x^2 + x - 20) = 4x^2 - (5x^2 - 20x + 3x - 12) - 64$

parantezler açılır;  $2x - 8 - x^2 - x + 20 = 4x^2 - 5x^2 + 20x - 3x + 12 - 64$

bilinenler bir tarafta bilinmeyenler diğer tarafta toplanır;

$$64 = 16x$$

her iki taraf 16 ya bölünürse,  $6 = x$  bulunur.

**Sorular :**

$$1^{\circ} \quad 4(x - 3) - 7(x - 4) = 6 - x \quad (C : 5)$$

$$2^{\circ} \quad 21(4x - 5) = 24(3x - 5) + 27 \quad (C : 1)$$

$$3^{\circ} \quad x - 3 - (3 - x)(x + 1) = x(x - 3) + 8 \quad (C : 7)$$

$$4^{\circ} \quad 21 - x(2x + 1) + 2(x - 4)(x - 2) = 24 \quad (C : 1)$$

$$5^{\circ} \quad (x + 3)(2x - 3) - 6x = (x - 4)(2x + 4) + 12 \quad (C : 5)$$

$$6^{\circ} \quad (x + 1)(x + 2) + (x - 2)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 4) + 12 \quad (C : 2)$$

$$7^{\circ} \quad (x - 1)(x - 2) + (x - 1)(x - 3) = 2(x - 2)(x - 3) \quad (C : \frac{7}{3})$$

$$8^{\circ} \quad (2x + 1)(2x + 6) - 7(x - 2) = 4(x + 1)(x - 1) - 9x \quad (C : \frac{-3}{2})$$

$$9^{\circ} \quad (x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + 3(4x - 2)(x - 1) \quad (C : 3)$$

$$10^{\circ} \quad (x - 9)(x - 7)(x - 5)(x + 1) = (x - 2)(x - 4)(x - 6)(x - 10) \quad (C : 5 \frac{1}{2})$$

$$11^{\circ} \quad 5x - \{8x - 3[16 - 6x - (4 - 5x)]\} = 6 \quad (C : 5)$$

$$12^{\circ} \quad x - 3\{x - 3[x - 3(x - 3)]\} = 21 \quad (C : 3)$$

E — İçinde, bir ifadenin karesi veya herhangi bir kuvveti bulunan denklemler:

1<sup>o</sup>) Önce karesi veya herhangi bir kuvveti bulunan ifadenin karesi veya o kuvveti alınır.

2<sup>o</sup>) Çarpımlar yapılır, parantezler açılır. Denklem usulüne göre çözülür.

Örnek 1 :  $4(x + 5)^2 - (2x + 1)^2 = 3(x - 5) + 180$  denklemini çözünüz.

Kareler alınır;  $4(x^2 + 10x + 25) - (4x^2 + 4x + 1) = 3(x - 5) + 180$

çarpımlar yapılır, parantezler açılır;

$$4x^3 + 40x + 100 - 4x^2 - 4x - 1 = 3x - 15 + 180$$

Bilinenler, bilinmeyenler ayrı taraflarda toplanır.

$$33x = 66$$

her iki taraf 33 e bölünür.  $x = 2$  bulunur

$$\text{Örnek 2 : } (x + 1)^2 - 2[(x - 1)^2 - 3(x + 2)^2] = 3(x + 4)(2x - 4) - (x^2 - 5)$$

Denklemi çözünüz.

**Çözümü :** Aşağıdaki çözüm işlemlerini takip ediniz.

$$x^2 + 2x + 1 - 2[x^2 - 2x + 1 - 3(x^2 + 4x + 4)] = 3(2x^2 - 4x + 8x - 16) - x^2 + 5$$

$$x^2 + 2x + 1 - 2(x^2 - 2x + 1 - 3x^2 - 12x - 12) = 6x^2 - 12x + 24x - 48 - x^2 + 5$$

$$x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + 4x - 2 + 6x^2 + 24x + 24 = 6x^2 - 12x + 24x - 48 - x^2 + 5$$

$$2x + 4x + 24x + 12x - 24x = -24 + 2 - 1 - 48 + 5$$

$$18x = -66$$

$$x = -\frac{11}{3} \text{ bulunur.}$$

**Sorular :**

1°)  $(x+7)(x+1) = (x+3)^2$

(C : 1)

2°)  $(2x-3)^2 - 4(x-2)^2 = 0$

(C :  $\frac{7}{4}$ )

3°)  $12(x-3)^2 = 3(2x-3)^2 - (15x+3)$

(C : 4)

4°)  $(x+15)(x-3) - (x-3)^2 = 30 - 15(x-1)$

(C : 3)

5°)  $3(x+5) - 3(2x-1) = 32 - 4(x-5)^2 + 4x^2$

(C : 2)

6°)  $(3x+1)^2 + 6 + 18(x+1)^2 = 9x(3x-2) + 65$

(C :  $\frac{2}{3}$ )

7°)  $(2x-1)(3x-1) - (x-1)(x+1) = 5(x-1)^2$

(C :  $\frac{3}{5}$ )

8°)  $(4x+3)^2 + (3x-2)^2 = (3x+2)^2 + (4x+1)^2$

(C : 1)

9°)  $(x-6)^2 + (x-4)^2 + (2x-9)^2 = (x-6)(6x-7)$

(C :  $\frac{7}{12}$ )

10°)  $(2x+1)^2 + (3x+1)^2 + (8x-3)^2 = (7x-2)(11x-1)$

11°)  $(8-3x)^2 + (5-4x)^2 - 6 = (9-5x)^2 + 20x - 4$

12°)  $(8x-3)^2(x-1) = (4x-1)^2(4x-5)$

(C :  $\frac{4}{13}$ )

**F — Paydalarında sayı bulunan kesirli denklemler :**

1°) Önce paydaların en küçük ortak katını bulunuz. (Buna ortak payda denir O.P.)

2°) Denklemin her iki tarafını bu bulduğunuz ortak payda ile çarpınız.

3°) Böylece paydasız kalan denklemi önce gördüğünüz şekilde çözünüz

**Örnek 1)**  $x + \frac{x+2}{6} = 5 + \frac{x-4}{4}$

denklemini çözünüz.

**Çözümü :**

O.P = 12 dir.

Denklemin her iki tarafı 12 ile çarpılır ;

$$12x + 2(x+2) = 60 + 3(x-4)$$

$$12x + 2x + 4 = 60 + 3x - 12$$

$$12x + 2x - 3x = 60 - 4 - 12$$

$$11x = 44$$

$$x = 4 \text{ bulunur.}$$

**Örnek 2)**  $\frac{x+1}{2} - \frac{2x-5}{5} = \frac{11x+5}{10} - \frac{x-13}{3}$

denklemini çözünüz.

**Çözümü :** O.P. = 30 dir.

Denklemin her iki tarafı 30 ile çarpılır.

$$15x + 15 - 12x + 30 = 33x + 15 - 10x + 130$$

$$15x - 12x - 33x + 10x = -15 - 30 + 15 + 130 \\ -20x = 100$$

$$x = -5 \text{ bulunur.}$$

**Örnek 3)**  $\frac{x(x+1)}{15} + \frac{(x-5)^2}{5} + \frac{(x+3)^2}{3} = \frac{(3x+1)(3x-1)}{15}$

denklemini çözünüz,

**Çözümü :** O.P. = 15 dir.

Her iki taraf 15 ile çarpılır ;

$$x(x+1) + 3(x-5)^2 + 5(x+3)^2 = (3x+1)(3x-1)$$

$$x^2 + x + 3(x^2 - 10x + 25) + 5(x^2 + 6x + 9) = 9x^2 - 1$$

$$x^2 + x + 3x^2 - 30x + 75 + 5x^2 + 30x + 45 = 9x^2 - 1$$

$$x - 30x + 30x = -1 - 45 - 75$$

$$x = -121 \text{ bulunur.}$$

**Sorular :**

1°)  $tx + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11$  (C : 6)

2°)  $\frac{4x}{3} + 24 = 2x + 6$  (C : 27)

3°)  $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} = x - 7$  (C : 15)

4°)  $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{7x}{12} + 9$  (C : 60)

5°)  $\frac{3x}{4} + 5 = \frac{5x}{6} + 2$  (C : 36)

6°)  $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$  (C : 96)

7°)  $\frac{2x}{3} = \frac{176-4x}{5}$  (C : 24)

8°)  $\frac{7x}{8} - 5 = \frac{9x}{10} - 8$  (C : 120)

9°)  $\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$  (C : 72)

- 10°)  $\frac{3x}{4} + \frac{180-5x}{6} = 29$ , (C : 12)
- 11°)  $1 + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4} - 4 - \frac{1}{2}$  (C : 6)
- 12°)  $2x - \frac{19-2x}{2} = \frac{2x-11}{2}$  (C : 2)
- 13°)  $\frac{x+1}{3} - \frac{3x-1}{5} = x - 2$  (C : 2)
- 14°)  $x + \frac{3x-9}{5} = 4 - \frac{5x-12}{3}$  (C : 3)
- 15°)  $\frac{10x+3}{3} - \frac{6x-7}{2} = 10x - 10$  C : 1  $\frac{1}{2}$
- 16°)  $x - 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} = 0$  C : 1  $\frac{1}{5}$
- 17°)  $\frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{3} + \frac{x+5}{4} = 16$  (C : 11)
- 18°)  $\frac{7x+9}{4} = 7 + x - \frac{2x-1}{9}$  (C : 5)
- 19°)  $\frac{3x-4}{2} - \frac{6x-5}{8} = \frac{3x-1}{16}$  C : 2  $\frac{1}{3}$
- 20°)  $\frac{x-3}{4} = \frac{x-5}{6} + \frac{x-1}{9}$  (C : 7)
- 21°)  $\frac{7x+5}{6} - \frac{5x+6}{4} = \frac{8-5x}{12}$  (C : 4)
- 22°)  $\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} + \frac{x-5}{6} = 4$  (C : 11)
- 23°)  $\frac{2x-5}{6} + \frac{6x+3}{4} = 5x - 11 \frac{1}{6}$  C : 3  $\frac{1}{2}$
- 24°)  $\frac{3x+5}{7} - \frac{2x+7}{3} + 10 - \frac{3x}{5} = 0$  (C : 10)
- 25°)  $\frac{3x-4}{7} + \frac{5x+3}{3} = 43 - 5x$  (C : 6)
- 26°)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 7 \frac{5}{6}$  (C : 10)
- 27°)  $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{x+3}{4} - \frac{2}{3}$  (C : 7)
- 28°)  $\frac{5-3x}{4} + \frac{5x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{3-5x}{3}$  (C : 1)
- 29°)  $\frac{27-2x}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7x-54}{10}$  (C : 12)
- 30°)  $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} + 4x = 12 + \frac{2x-1}{6}$  (C : 3)

- 31°)  $\frac{5x-1}{7} + \frac{9x-5}{11} = \frac{9x-7}{5}$  (C : 3)
- 32°)  $\frac{8-x}{6} + x - 1 \frac{2}{3} = \frac{x+6}{2} - \frac{x}{3}$  (C : 5)
- 33°)  $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11}{6}(x+3)$  (C : 2)
- 34°)  $\frac{7x-4}{8} + 2 \frac{2}{3} + \frac{4-7x}{4} = x - \frac{7}{12}$  (C : 2)
- 35°)  $\frac{2-x}{3} + \frac{3-x}{4} + \frac{4-x}{5} + \frac{5-x}{6} + \frac{3}{4} = 0$  (C : 4)
- 36°)  $\frac{5x-3}{7} - \frac{9-x}{3} = \frac{5x}{2} + \frac{19}{6}(x-4)$  (C : 2)
- 37°)  $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x-5}{3} + \frac{x-3}{4} - \frac{x}{6} = x + 1$  (C : -7)
- 38°)  $\frac{\frac{1}{2}x-3}{5} + \frac{\frac{3}{4}x-10}{2} + \frac{4-x}{4} = \frac{10-x}{6}$  (C : 16)
- 39°)  $\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 \frac{8}{9}$  (C : 5)
- 40°)  $x + \frac{5x-8}{3} = 6 - \frac{3x-6}{5}$  (C : 3)
- 41°)  $\frac{x-2}{4} + \frac{1}{3} = x - \frac{2x-1}{3}$  (C : -6)
- 42°)  $\frac{x}{7} - \frac{3x}{2} + \frac{71}{2} = \frac{3x+1}{2} + 1 \frac{1}{14}$
- 43°)  $\frac{7+9x}{4} - 1 + \frac{2-x}{9} = 7x$
- 44°)  $\frac{2x-10}{3} - \frac{3x-40}{11} = 15 - \frac{57-x}{5}$  (C : 17)
- 45°)  $\frac{x-1}{4} - \frac{x-5}{32} + \frac{15-2x}{40} = \frac{9-x}{2} - \frac{7}{8}$  (C : 5)
- 46°)  $\frac{x+1}{7} + x(x-2) = (x-1)^2$  (C : 6)
- 47°)  $\frac{x-4}{3} + (x-1)(x-2) = x^2 - 2x - 4$  (C : 7)
- 48°)  $\frac{3x^2-2x-8}{5} = \frac{(7x-2)(3x-6)}{35}$  (C : 2)
- 49°)  $\frac{x+10}{3} - \frac{2(3x-4)}{5} + \frac{(3x-2)(2x-3)}{6} = x^2 - \frac{2}{15}$  (C : 2)
- 50°)  $\frac{x-5}{7} + \frac{x^2+6}{3} = \frac{x^2-2}{2} - \frac{x^2-x+1}{6} + 3$  (C : -23)

$$51^{\circ}) \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left( \frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

$$52^{\circ}) \left[ \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{3} \right] - \left[ x - \frac{1}{3}(2x-1) \right] = 0$$

$$53^{\circ}) \frac{1}{9} \left[ 3x-6 - 5 \left( \frac{7x}{2} - 5 \right) \right] + 13(x-5) + \frac{1}{4} = 0$$

$$54^{\circ}) \left( \frac{3}{2}x-2 \right)^2 + \left( 2x+\frac{1}{2} \right)^2 = \left( \frac{5}{2}x+1 \right)^2 - \frac{33}{8}$$

$$55^{\circ}) \left( \frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{4}{5}x + \frac{1}{3} \right)^2 = \left( x + \frac{1}{2} \right)^4$$

$$56^{\circ}) \frac{x(2x+1)}{4} + \frac{(3x+1)(x+5)}{9} = \frac{(5x+4)(x+3)}{6} - \frac{7x-4}{4}$$

$$57^{\circ}) 11 - \left( \frac{3x-1}{4} + \frac{2x+1}{3} \right) = 10 - \left( \frac{2x-5}{3} + \frac{7x-1}{8} \right)$$

$$58^{\circ}) \frac{3x+3}{2} - \left( \frac{x+1}{6} + 3 \right) = \frac{5x+2}{3} - \left( \frac{3x-1}{2} - 3 \right)$$

$$59^{\circ}) \frac{x-1}{4} - \frac{1}{8} \left( \frac{x-5}{4} - \frac{14-2x}{5} \right) = \frac{x-9}{2} - \frac{7}{8}$$

G — Paydalarında bilinmeyen bulunan kesirli denklemler.

1°) Paydalar çarpanlarına ayrılır.

2°) Paydaların en küçük ortak katı olan ifade bulunur

3°) Denklemin her iki tarafı bu en küçük ortak kat ifadesi ile çarpılır.  
(Bu çarpmada çarpanları sıfır yapmayıza değerleri düşünmek lâzımdır.)

4°) Paydadandan kurtulan denklem, önce görüldüğü gibi çözülür.

**Örnek 1 :**  $\frac{4}{1+x} + \frac{x+1}{1-x} - \frac{x^2-3}{1-x^2} = 0$  denklemini çözünüz,

paydaların en küçük ortak katı olan ifade,

$$(1-x^2) \text{ dir.}$$

Denklemin her iki tarafı  $(1-x^2)$  ile çarpılır. ( $x \neq \pm 1$  olmak şartıyla)

$$4(1-x) + (x+1)^2 - (x^2-3) = 0$$

$$4-4x+x^2+2x+1-x^2+3=0$$

$$-2x=-8$$

$$x=4 \text{ bulunur.}$$

**Örnek 2 :**  $\frac{5}{x-1} - \frac{14}{x+1} = -\frac{9}{x+3}$  denklemini çözünüz.

**Çözümü :** Paydaların en küçük ortak katı olan ifade,  $(x-1)(x+1)(x+3)$  dir.

Denklemin her iki tarafını  $(x-1)(x+1)(x+3)$  ile çarpalım.  
( $x \neq 1, x \neq -1, x \neq -3$  olmak şartıyla)

$$5(x+1)(x+3) - 14(x-1)(x+3) = -9(x+1)(x-1)$$

$$5x^2 + 20x + 15 - 14x^2 - 28x + 42 = -9x^2 + 9$$

$$5x^2 - 14x^2 + 9x^2 + 20x - 28x = -15 - 42 + 9$$

$$-8x = -48$$

$$x = 6 \text{ bulunur.}$$

**Örnek 3 :**  $\frac{x+1}{x^2+x-6} + \frac{5}{3x-x^2-2} = \frac{x}{x^2+2x-3}$

denklemini çözünüz.

**Çözümü :**

Paydalar, çarpanlarına ayrılarak yazılır.

$$\frac{x+1}{(x+3)(x-2)} + \frac{5}{-(x-1)(x-2)} = \frac{x}{(x+3)(x-1)}$$

Paydaların en küçük ortak katı olan ifade :  $(x+3)(x-2)(x-1)$  dir.  
Denklemin her iki tarafı bu ifade ile çarpılır.

$$(x+1)(x-1) - 5(x+3) = x(x-2)$$

$$x^2 - 1 - 5x - 15 = x^2 - 2x$$

$$-3x = 16$$

$$x = -\frac{16}{3}$$

**Sorular :**

$$1^{\circ}) \frac{12}{x} + \frac{1}{12x} = \frac{29}{24} \quad (\text{C : 10})$$

$$2^{\circ}) \frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3} \quad (\text{C : 8})$$

$$3^{\circ}) \frac{128}{3x-4} = \frac{216}{5x-6} \quad (\text{C : 12})$$

$$4^{\circ}) \frac{45}{2x+3} = \frac{57}{4x-5} \quad (\text{C : 6})$$

$$5^{\circ}) x+1 - \frac{x^2+3}{x+2} = 2 \quad (\text{C : 5})$$

$$6^{\circ}) \frac{x-1}{x-2} = \frac{7x-21}{7x-26} \quad (\text{C : 8})$$

- 7°)  $\frac{7x-4}{x-1} = \frac{7x-26}{x-3}$  (C :  $\frac{7}{4}$ )
- 8°)  $\frac{2x-6}{3x-8} = \frac{2x-5}{3x-7}$  (C : 2)
- 9°)  $\frac{6x+8}{2x+1} - \frac{2x+38}{x+12} = 1$  (C : 2)
- 10°)  $\frac{3x-1}{2x-1} - \frac{4x-2}{3x-2} = \frac{1}{6}$  (C : 2)
- 11°)  $\frac{2}{2x-3} + \frac{1}{x-2} = \frac{6}{3x+2}$  (C :  $\frac{50}{29}$ )
- 12°)  $\frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}$  (C : 7)
- 13°)  $\frac{x}{x-2} + \frac{x-9}{x-7} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-8}{x-6}$  (C : 4)
- 14°)  $\frac{3-2x}{1-2x} - \frac{2x-5}{2x-7} = 1 - \frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$  (C : -1)
- 15°)  $\frac{3+x}{3-x} - \frac{2+x}{2-x} - \frac{1+x}{1-x} = 1$  (C :  $\frac{3}{2}$ )
- 16°)  $\frac{2x^2-11x-39}{x-8} = \frac{4x^2+8x+2}{2x-1}$  (C : 11)
- 17°)  $\frac{x^2-6x+10}{x^2+8x+16} - \frac{(x-3)}{x+4} = 0$
- 18°)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{34}{x^2+2x-3} = 0$  (C : 3)
- 19°)  $\frac{2x-13}{2x-16} + \frac{2(x-6)}{x-8} = \frac{7}{8} + \frac{2(5x-39)}{3x-24}$  (C : 12)
- 20°)  $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}$  (C : 1)
- 21°)  $\frac{6x}{5x+5} + \frac{3x-10}{x+1} - \frac{x+25}{6x+6} + \frac{5x-1}{4x+4} = 2$  (C : 5)
- 23°)  $\frac{31x-9}{9x+5} + \frac{16x-43}{10x-7} = \frac{4x^2-632x+521}{90x^2-13x-35} + 5$  (C : 6)
- 24°)  $\frac{1+x}{x-1} - \frac{3+x}{x+1} = \frac{4}{x+1}$  (C : 2)
- 25°)  $\frac{3}{x+2} - \frac{5x}{x^2-4} = \frac{3}{x-2} + \frac{x}{x^2-4}$  (C : -2)
- 26°)  $\frac{3x-4}{5x-6} + \frac{2x-5}{5x+6} = \frac{25x^2-27x-42}{25x^2-36}$
- 27°)  $\frac{2x-9}{3x-1} + \frac{2x-7}{2x+5} = \frac{(5x-13)(2x-4)}{6x^2+13x-5}$
- 28°)  $\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+4}{x+5} = \frac{x+2}{x+3} - \frac{x+5}{x+6}$  (C : -4)

- 29°)  $\frac{x+2}{12x^2+34x+24} - \frac{x+14}{12x^2-14x-48} + \frac{6x-4}{9x^2-12x-32} = 5$
- 30°)  $\frac{2x+1}{x^2-3x+2} + \frac{3x+2}{x^2-x} = \frac{5}{x}$
- 31°)  $\frac{7}{x^2-11x+30} + \frac{2}{x^2-9x+18} = \frac{9}{x^2-5x}$
- 32°)  $\frac{1}{x^2-7x+12} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x^2-5x+4}$

**H - Harfli denklemeler:**

1°) Harfli denklemelerin çözümünde bilinmemişenden başka bütün harfleri bilinen sayılar gibi düşününüz.

2°) Denklemde her iki tarafını bu harflerle ilgili ifadelerle çarpar veya bölerken, bu ifadelerin sıfırdan farklı olmasına dikkat ediniz.

Harfli denklemeleri çözerken çok zaman sonunda irdaleme ile karşılaşırız.

**Örnek 1 :**  $m(x+2)=x+a+2$  denklemini çözünüz;

**Çözümü :**  $mx+2m=x+a+2$

$$mx-x=a+2-2m$$

$$(m-1)x=a-2m+2$$

bulunur.

1°)  $x$  in katsayısı  $m-1=0$  veya  $m=1$  olursa denklem,  $0 \cdot x=a-2m+2$  haline gelir ki denklem imkânsız olur.

2°)  $m-1 \neq 0$  ise denklemin çözümü,  $x = \frac{a-2m+2}{m-1}$  olur.

**Örnek 2 :**  $(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+c)+ab$ , denklemi çözünüz:

**Çözümü :** çarpma操作 yapılır.

$$x^2+ax+bx+ab-ac-c^2=x^2-c^2+ab$$

$$ax+bx=ac$$

$$(a+b)x=ac$$

1°)  $a+b \neq 0$  ise **Çözüm**,

$$x = \frac{ac}{a+b}$$

2°)  $a+b=0$  yani  $a=-b$  olursa denklem,  $0 \cdot x=ac$  olur ki bu da  $ac \neq 0$  ise mümkün değildir.

Soruclar :

$$1^{\circ}) \quad 3(a-2x) = 3a - 5(x+b)$$

$$2^{\circ}) \quad (a^2+x)^2 = x^2 + 4a^2 + a^4$$

$$3^{\circ}) \quad (x-a)^2 = (2a-x)^2 - a^2$$

$$4^{\circ}) \quad (a+x)(a-x) = 3a^2 - (a-x)^2$$

$$5^{\circ}) \quad \frac{3ax-2b}{3b} - \frac{ax-a}{2b} = \frac{ax}{b} - \frac{2}{3}$$

$$6^{\circ}) \quad ax - \frac{bx+1}{x} = \frac{(2ax^2-1)}{x}$$

$$7^{\circ}) \quad \frac{x^2-a}{bx} - \frac{a-x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x}$$

$$8^{\circ}) \quad 5ax-8b = ax-4bx$$

$$9^{\circ}) \quad 2ax+b = bx+2a$$

$$10^{\circ}) \quad \frac{ax+b}{c} + a = \frac{ac+x}{c}$$

$$11^{\circ}) \quad (a-x)(b-x) = x^2$$

$$12^{\circ}) \quad \frac{x-a}{b} = \frac{x+b}{a}$$

$$13^{\circ}) \quad am-b = \frac{ax}{b} + \frac{x}{m} = 0$$

$$14^{\circ}) \quad \frac{a-b}{bx} = \frac{a}{b} - \frac{a+bx}{bx} = 1$$

$$15^{\circ}) \quad \frac{3a+2b}{a^2} - \frac{4ax-b}{2a^2x} = \frac{1}{ax}$$

$$16^{\circ}) \quad \frac{(a+b)x}{b} - \frac{b^2}{a+b} = a-b + \frac{bx}{a+b}$$

$$17^{\circ}) \quad \frac{ax-bc}{ba} - \frac{bx-ac}{c^2} = \frac{cx-b^2}{bc} - \frac{x-a}{c} + 1 - \frac{x}{a}$$

$$18^{\circ}) \quad \frac{ab+x}{b^2} - \frac{b^2-ax}{a^2b} = \frac{x-b}{a^2} - \frac{ab-x}{b^2} - 1 + \frac{3a}{b}$$

$$19^{\circ}) \quad \frac{a^2-x}{b} - \frac{ab-x}{c} + \frac{c^2-x}{a} + \frac{a^2b+cx}{ab} = \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{a}$$

$$20^{\circ}) \quad \frac{a^2}{b}(x-a) - b(x-2a) = \frac{b^2}{a}(x-a) - a(x-a-b)$$

$$21^{\circ}) \quad \frac{3}{c} - \frac{ab-x^2}{bx} = \frac{4x-ac}{cx}$$

$$22^{\circ}) \quad \frac{x-2a}{x+3a} + \frac{2x^2-13a^2}{x^2-9a^2} = 3$$

(C : 5b)

(C : 2)

(C : a)

C : -  $\frac{a}{2}$

(C : 1)

C :  $\frac{a-1}{b}$

(C : b-1)

C :  $\frac{2b}{a+b}$

(C : 1)

C :  $\frac{b}{1-a}$

C :  $\frac{ab}{a+b}$

C :  $\frac{a^2+b^2}{a-b}$

(C : bm)

C :  $\frac{2a-b}{a-2b}$

C :  $\frac{2a-b}{2(a+2b)}$

C :  $\frac{ab}{a+2b}$

(C : c)

(C : a<sup>2</sup>)

(C :  $\frac{a^2b}{a-c}$ )

(C : a)

(C :  $\frac{b}{c}$ )

(C : 4a)

$$23^{\circ}) \quad \frac{a^2-3bx}{a^2+3bx} + \frac{b^2+2ax}{b^2-2ax} = 2$$

(C : 0)

$$24^{\circ}) \quad \frac{4x-5b}{6x+2b} - \frac{6x-7a}{9x+3b} = \frac{14a-15b}{54a-30b}$$

(C : 3a-2b)

$$25^{\circ}) \quad \frac{4x-3a}{10x-6b} + \frac{5x-6a}{10x-15a} = \frac{6x+5b}{15x-9b} + \frac{3x+4b}{6x-9a}$$

(C :  $\frac{5a+4b}{10}$ )

$$26^{\circ}) \quad \frac{a^2+x}{b^2-x} - \frac{a^2-x}{b^2+x} = \frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$$

(C :  $\frac{a+b}{a-b}$ )

$$27^{\circ}) \quad \frac{ax-bx}{a^2+ab} + \frac{a-b}{a} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{x}{b}$$

(C :  $\frac{b^2}{a-b}$ )

$$28^{\circ}) \quad \frac{ab}{x-a} + \frac{ax}{x+b} + \frac{bx^2}{x^2-a^2} = \frac{(a+b)(abx+bx^2+x^3)}{(x^2-a^2)(x+b)}$$

(C :  $\frac{b^2}{a}$ )

$$29^{\circ}) \quad \frac{3a}{a+2x} + \frac{2b}{2a+x} + \frac{2x^2-2a^2-10ab+8b^2}{2a^2+5ax+2x^2} = 1$$

(C : a-2b)

### I - Dahagüç denklemler

$$1^{\circ}) \quad \frac{\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x}{1-x} - 1} = \frac{3}{14-x}$$

(C : 5)

$$2^{\circ}) \quad \frac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}} + \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{x}{1-x}} + \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1+x}} + \frac{3}{2x} = 0 \quad (C : \mp 3)$$

$$3^{\circ}) \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} = 2$$

(C : -  $\frac{1}{3}$ )

$$4^{\circ}) \quad \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}$$

(C : -  $\frac{1}{5}$ )

$$5^{\circ}) \quad \frac{1}{x-\frac{1}{1-\frac{x+1}{x-3}}} = 4$$

(C :  $\frac{4}{5}$ )

$$6^{\circ}) \quad \frac{1+\frac{x}{x+3}}{1-\frac{x}{x+3}} = 3$$

(C : 3)

$$7^{\circ}) \frac{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - x} \quad (C: \frac{1}{3})$$

$$8^{\circ}) \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{x}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + 1} \quad (C: \frac{2}{3})$$

$$9^{\circ}) \frac{2}{3} \left[ \frac{2x}{9} - \frac{1}{2} \left( \frac{3x-1}{6} + \frac{2x-5}{7x+8} + x \right) \right] + \frac{19x+3}{54} = 0$$

$$10^{\circ}) \frac{1}{5} \left[ \frac{5-4x}{2} - 3x - 1 + 10 \left( \frac{2 \cdot \frac{1}{2}x + 1}{11x+6} \right) - \frac{3}{2} \right] = 1 - x \quad (C: \frac{2}{3})$$

$$11^{\circ}) \frac{\frac{x+a}{a}}{\frac{x-a}{a}} = \frac{\frac{1-x}{a}}{\frac{1}{a} - x}$$

$$12^{\circ}) \frac{\frac{a}{a-1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{a}{a+1}}{\frac{1}{x-1}}$$

$$13^{\circ}) \frac{\frac{x-1}{a}}{\frac{a+1}{x}} = \frac{\frac{x}{a-1}}{\frac{a}{a+x}}$$

$$14^{\circ}) \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1 + \frac{x}{b}}{2 - \frac{x}{b}}$$

$$15^{\circ}) a + \frac{x}{1 + \frac{1}{a}} = 1 + \frac{x}{1 - \frac{1}{a^2}}$$

$$16^{\circ}) \frac{1}{x + \frac{1}{1 + \frac{x-1}{3+x}}} = -\frac{1}{3}$$

## BÖLÜM VI

Bir bilinmiyeni denklem yardımı ile çözülebilen problemler.

A — Sayı problemleri:

1 — Herhangi bir sayıyı bulmak:

Örnek 1: Dört fazlasının üçte biri, yarısından dört eksigine eşit olan sayıyı bulunuz.

Çözümü :

Sayı .....  $x$

4 fazlasının üçte biri .....  $\frac{x+4}{3}$

Yarısının 4 eksiği .....  $\frac{x}{2} - 4$

Denklemi ;  $\frac{x+4}{3} = \frac{x}{2} - 4$

Çözümü :  $x = 32$

Örnek 2: Sepetteki portakalların bir fazlasının üçte birinden 3 fazlası, bütün portakalların bir eksiginin yarısına eşittir. Sepetteki portakal sayısını bulunuz.

Çözümü :

Portakal sayısı .....  $x$

Bir fazlasının üçte birinden 3 fazası .....  $\frac{x+1}{3} + 3$

Bir eksiginin yarısı .....  $\frac{x-1}{2}$

Denklemi ;  $\frac{x+1}{3} + 3 = \frac{x-1}{2}$

Çözümü ;  $x = 23$

2 — Toplamları veya farkları belli olan iki sayıyı bulmak:

Örnek 1: Toplamları 60 eden iki sayı var. 200 den birincinin 8 katı çıkarılıncaya, ikincinin 3 katından 100 eksigi elde ediliyor. Bu sayıları bulunuz.

$$\text{Çözümü:} \quad \begin{array}{c} \text{1. sayı} \\ \hline 60-x \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{2. sayı} \\ \hline x \end{array}$$

$$\text{Denklem: } 200 - 8(60-x) = 3x - 100$$

çözülürse,

$$1. \text{ nci sayı} \dots \dots \dots x = 36$$

$$2. \text{ " " } 60 - 36 = 24 \text{ olur.}$$

Örnek 2: Farkları 4 eden iki sayı var. Bu sayılardan büyüğünün yarısından, küçüğünün altıda biri çıkarılırsa 8 kalıyor. Sayıları bulunuz.

$$\text{Çözümü:} \quad \begin{array}{c} \text{Büyük sayı} \\ \hline x+4 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Küçük sayı} \\ \hline x \end{array}$$

$$\text{Denklem: } \frac{1}{2}(x+4) - \frac{1}{6}x = 8$$

çözülürse,

$$\text{Küçük sayı} \dots \dots \dots x = 18$$

$$\text{Büyük sayı} \dots \dots \dots 18+4 = 22 \text{ olur.}$$

Örnek 3: Toplamları 162 eden iki sayı var. Büyüüğü küçüğünne bölündüğü zaman bölüm 3, kalan 14 olduğuna göre sayıları bulunuz.

$$\text{Çözümü:} \quad \begin{array}{c} \text{Küçük sayı} \\ \hline x \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Büyük sayı} \\ \hline 162 - x \end{array}$$

$$\text{Denklem: } \frac{162 - x}{x} = 3 + \frac{14}{x}$$

çözülürse,

$$\text{Birinci sayı} \dots \dots \dots x = 37$$

$$\text{İkinci sayı} \dots \dots \dots 162 - 37 = 125 \text{ olur.}$$

3 — Bir sayıyı ikiden fazla parçalara ayırmak:

Örnek 1: 47 sayısını öyle üç kısma ayıriz ki, ikinci birinciden 8 fazla, üçüncü de ikinciden 10 fazla olsun.

$$\text{Çözümü:} \quad \begin{array}{c} \text{I. nci} \\ \hline x \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{II. nci} \\ \hline x+8 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{III. ncü} \\ \hline x+8+10 \end{array}$$

$$\text{Denklem: } x + x + 8 + x + 8 + 10 = 47$$

çözülürse,

$$\text{I. nci sayı} \dots \dots \dots x = 7$$

$$\text{II. " " } \dots \dots \dots 7+8 = 15$$

$$\text{III. " " } \dots \dots \dots x+8+10 = 25 \text{ olur.}$$

Örnek 2: 80 sayısını öyle dört parçaya ayıriz ki, birincinin 3 fazlası, ikincinin 3 eksigi, üçüncüün 3 katı, dördüncüün 3 de biri birbirine eşit olsun.

Çözümü:

$$\text{I. nci}$$

$$\text{II. nci (birincinin 3 fazlası, ikincinin 3 eksigine eşit olacağına göre)}$$

$$x+6$$

$$\text{III. ncü (Birincinin 3 fazlası, üçüncüsünü 3 katı olacağına göre)}$$

$$\frac{x+3}{3}$$

$$\text{IV. ncü : (Birincinin 3 fazlası dördüncüün 3 de birine eşit olacağına göre)} \quad 3(x+3)$$

$$\text{Denklem: } x + (x+6) + \frac{x+3}{3} + 3(x+3) = 80$$

çözülürse,

$$\text{I. nci sayı} \quad x = 12$$

$$\text{II. " " } \quad 12 + 6 = 18$$

$$\text{III. " " } \quad \frac{12+3}{3} = 5$$

$$\text{IV. " " } \quad 3(12+3) = 45 \text{ bulunur.}$$

$$\text{Toplam} \dots \dots \dots 80$$

4 — Ardışık sayılar:

Örnek 1: Ardışık (ard arda gelen) iki sayı bulunuz ki, birincinin yarısı ile beşte biri toplamı, ikincinin üçe biri ile 4 de biri toplamına eşit olsun.

Çözümü:

Sayılar

$$\begin{array}{ccc} & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & x+1 \end{array}$$

$$\text{Denklem: } \frac{x}{2} + \frac{x}{5} = \frac{x+1}{3} + \frac{x+1}{4}$$

çözülürse,

$$\text{Birinci sayı} \dots \dots \dots 5 = 5$$

$$\text{İkinci " } \dots \dots \dots 5+1 = 6 \text{ olur.}$$

Örnek 2: Öyle ardışık altı sayı bulunuz ki; ilk üçünün kareleri toplamı, son üçünün kareleri toplamından 99 eksik olsun.

$$\begin{array}{cccccc} \text{1. sayı} & \text{2. sayı} & \text{3. sayı} & \text{4. sayı} & \text{5. sayı} & \text{6. sayı} \\ \hline x & x+1 & x+2 & x+3 & x+4 & x+5 \end{array}$$

$$\text{Denklem: } x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2 + (x+5)^2 - 99$$

$$\text{çözülürse,} \quad x = 3$$

$$\text{Ardışık sayılar: } 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 \text{ olur.}$$

## 5 — Kesirli sayılar :

Örnek 1: Payı paydasından 5 eksik olan bir kesrin, payına bir ekler, paydasından 2 çıkarırsak kesrin değeri  $\frac{5}{7}$  oluyor. Kesri bulunuz.

Çözümü :

$$\text{Kesir: } \frac{x}{x+5}$$

Denklem :

$$\frac{x+1}{x+5-2} = \frac{5}{7}$$

çözülürse,  $x = 4$ , kesir:  $\frac{x}{x+5} = \frac{4}{9}$  olur.

Örnek 2: Değeri  $\frac{3}{4}$  olan bir kesrin payına 1 ekler paydasından 3 çıkarırsak, kesrin değeri  $\frac{8}{9}$  oluyor. Bu kesri bulunuz.

$$\text{Çözümü: } \text{Kesir: } \frac{3x}{4x}$$

$$\text{Denklem: } \frac{3x+1}{4x-3} = \frac{8}{9}$$

çözülürse,  $x = 3$ , Kesir:  $\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$  olur.

## 6 — Rakamları ile verilen sayılar :

Örnek 1) Rakamları toplamı 10 eden iki rakamlı bir sayı bulunuz ki, bu sayının 3 katından 2 noksası ters yazılısına eşit olsun.

Çözümü : Onlar bas. Birler bas.

$$\begin{array}{c} x \\ \hline 10-x \end{array}$$

$$\text{sayı: } \dots \dots, 10x + (10-x)$$

$$\text{Ters yazılışı: } 10(10-x) + x$$

Denklem :

$$3[10x + (10-x)] - 2 = 10(10-x) + x$$

çözülürse, onlar basamağı:  $\dots \dots x = 2$

$$\text{Birler: } 10 - 2 = 8$$

$$\text{Sayı: } 28$$

Örnek 2) Birler basamağı onlar basamağından 5 eksik olan ve rakamları toplamı 12 eden üç rakamlı bir sayı var. Bu sayının iki katından 15 fazlası ters yazılısına eşit olduğuna göre sayıyı bulunuz.

Çözümü : Onlar basamağına  $x$  dersek :

$$\begin{array}{c} \text{Y. basamağı} & \text{O. basamağı} & \text{B. basamağı} \\ \hline 12 - x - (x-5) & x & x-5 \end{array}$$

$$\text{Sayı: } 100(17-2x) + 10x + x-5$$

$$\text{Ters yazılışı: } 100(x-5) + 10x + 17 - 2x$$

$$\text{Denklem: } 2[100(17-2x) + 10x + x-5] + 15 = 100(x-5) + 10x + 17 - 2x$$

Denklem çözülfürse :

$$\text{Onlar basamağı: } x = 8,$$

$$\text{Birler basamağı: } x-5 = 8-5 = 3$$

$$\text{Yüzler basamağı: } 17 - 2x = 17 - 16 = 1;$$

$$\text{Sayı: } 183$$

## Sorular :

Herhangi bir sayı :

1) Hangi sayının  $\frac{3}{4}$  ünden 8 çıkarılır ve neticeye aynı sayının yarısından 5 fazlası eklenirse 97 elde edilir. (C : 80)

2) Bir sayının 7 eksigini 3 le çarpıp çarpımı 2 ekliyoruz. Böylece sayının 8 katının 3 eksiginin 7 ye bölümünü elde ediliyor. Sayıyı bulunuz. (C : 10)

3) Hangi sayının yarısı, üçe biri, altıda biri ve 12 de biri toplamı kendisinden bir fazla eder? (C : 12)

4) 42 ye 42 de biri eklenince kendisinden bir fazlası elde edilen sayıyı bulunuz. (C : 42)

5) Hangi sayının 3 de biri ile 4 de biri toplamı, yarısından 10 fazla eder? (C : 120)

6) Hangi sayının  $\frac{2}{5}$  si,  $\frac{1}{4}$  i ve  $\frac{8}{25}$  i toplamı kendisinden 25 fazla eder? (C : 500)

## 7) Bir sayıyı parçalara ayırma :

7) 45 sayısını öyle iki parçaya ayıriz ki; birinci parçanın yarısı, diğerinin  $\frac{1}{5}$  indek 5 fazla olsun; (C : 20 ; 25)

8) 200 sayısını öyle iki parçaya ayıriz ki; birincinin  $\frac{1}{16}$  i ile ikincinin  $\frac{1}{10}$  i farklı 6 olsun. (C : 160 ; 40)

9) 50 sayısını öyle iki parçaya ayıriz ki; birincinin  $\frac{3}{4}$  ü ile ikincinin  $\frac{5}{6}$  toplamı 40 etsin? (C : 20 ; 30)

10) 88 sayısını öyle dört parçaya ayıriz ki; birinci parçanın 2 fazlası, ikinci parçanın 3 eksiği, üçüncü parçanın 4 katı, dördüncü parçanın 5 de biri birbirine eşit olsun? (C : 10 ; 15 ; 3 ; 60)

12) 90 sayısını öyle dört parçaya ayıriz ki; birinciye (5) ekler, ikinciden 4 çıkarır, üçüncüyü 3 le çarpar, dördüncüyü 2 ye bölersek elde edilen sonuçlar birbirine eşit olsun? (C : 16 ; 25 ; 7 ; 42)

**Toplamları veya farkları belli sayılar :**

13) Toplamları 70 eden ve biri diğerinin altı katı olan iki sayı bulunuz. (C : 10 ; 60)

14) Toplamları 50 eden öyle iki sayı bulunuz ki ; sayılarından birinin bir fazlası, diğerinin üç eksiginin 3 de birine eşit olsun. (C : 11 ; 39)

15) Farkları 12 eden iki sayı bulunuz ki ; birincinin 4 de biri ikincinin 8 de birinden 14 fazla olsun ? (C : 100 ; 88)

16) Farkları 15 eden iki sayı var. Toplamlarının  $\frac{1}{5}$  i, büyüğünün  $\frac{3}{8}$  üne eşit olduğuna göre sayıları bulunuz. (C : 120 ; 105)

17) İki sayının farkları 42 dir. Sayıların her ikisine de (8) eklerek biri diğerinin dört katı oluyor. Sayıları bulunuz ? (C : 6 ; 48)

18) İki sayının toplam 890 000 dir. Bu sayılardan birinin  $\frac{2}{5}$  i ile  $\frac{1}{3}$  i topla-  
mın, diğerinin  $\frac{3}{4}$  üne eşit olduğuna göre sayıları bulunuz ? (C : 450 000 ; 440 000)

**Ardışık sayılar :**

19) Toplamları 1028 eden dört tane çift ardışık sayı bulunuz. (C : 254 ; 256 ; 258 ; 260)

20) Toplamları 909 eden ardışık üç tek sayı bulunuz. (C : 301 ; 303 ; 305)

21) Ardışık öyle iki sayı bulunuz ki ; birincinin yarısı ile beşte biri toplamı, ikincinin üçte biri ile dörtte biri toplamına eşit olsun ? (C : 5 ; 6)

22) Gülay, Koray ve Güner'in numaraları ardışık ve tek sayılardır. En küçük numarada Gülay'ın numarasıdır. Bu numaralarının toplamlarının bir fazlası 250 etti-  
gine göre üç arkadaşın numaralarını bulunuz ? (C : 81 ; 83 ; 85)

23) Öyle ardışık üç çift sayı bulunuz ki ; baştakının  $\frac{1}{3}$  i ile ortadakiniin  $\frac{1}{4}$  i  
toplamından, sondakinin yarısı çıkarılınca 2 kalsın ? (C : 42 ; 44 ; 46)

**Kesir :**

24) Değeri  $\frac{1}{6}$  eden bir kesrin payına 5 ekler, paydasından 6 çıkarırsak kesrin  
değeri  $\frac{2}{3}$  oluyor. Kesri bulunuz ? (C :  $\frac{3}{18}$ )

25) Payı payasının 3 katından bir fazla olan bir kesrin, payasından 3 çıkarır  
payasına 4 eklerek kesrin değeri  $\frac{5}{4}$  oluyor. Kesri bulunuz. (C :  $\frac{13}{4}$ )

26) Paydası payasının iki katından 1 eksik olan bir kesrin, payasının 2 katına  
4 eklendir, payasının 3 katından 1 çıkarılırsa, kesrin değeri  $\frac{2}{3}$  oluyor. Kesri bulunuz.  
(C :  $\frac{7}{13}$ )

27)  $\frac{17}{28}$  kesrinin pay ve paydasından hangi sayıyı çıkaralım ki, kesrin değeri  
 $\frac{4}{15}$  e eşit olsun ? (C : 13)

28) Paydası payasının 4 katı olan bir kesrin, payasından 2 çıkarılıp paydasına 3  
eklenirse, kesrin değeri  $\frac{1}{5}$  e eşit oluyor. Kesri bulunuz. (C :  $\frac{13}{52}$ )

29) Değeri  $\frac{3}{2}$  olan bir kesrin, payı iki ile çarپılıp paydasına 2 eklenirse kesrin  
değeri 2 ye eşit oluyor. Kesri bulunuz. (C :  $\frac{6}{4}$ )

**Rakamlarına göre verilen sayılar :**

30) Rakamları toplamı 10 olan öyle iki rakamlı bir sayı bulunuz ki ; bu sayının  
3 katından 2 eksigi ters yazılısına eşit olsun ? (C : 28)

31) Rakamları toplamı 14 eden iki rakamlı bir sayının 2 katından 23 eksigi  
ters yazılısına eşittir. Bu sayıyı bulunuz. (C : 59)

32) Onlar basamağındaki rakamın  $\frac{4}{3}$  ü birler basamağındaki rakamına eşit olan iki  
basamaklı bir sayı var. Bu sayının 18 fazlası ters yazılısına eşittir. Bu sayıyı bul-  
nuz ? (C : 68)

33) Üç rakamlı bir sayının yüzler basamağındaki sayı 3 dır. Birler basamağın-  
daki sayı onlar basamağından 1 eksiktir. Bu sayı birler ve yüzler basamakının  
yer değiştirmesiyle elde edilen sayıdan 198 eksik olduğuna göre sayıyı bulunuz ?  
(C : 365)

34) Birler basamağı onlar basamağından 3 eksik ve rakamları toplamı 8 eden  
üç rakamlı bir sayı var. Bu sayının 2 katından 16 eksigi, o sayının ters yazılışı ile  
elde edilen sayıdan 36 fazla olduğuna göre sayıyı bulunuz ? (C : 152)

35) Soldan 1 rakamı ile başlayan altı rakamlı bir sayı var. Eğer bu rakam sol-  
daki birinci yerden sağdaki sonuncu yere götürürse elde edilen yeni sayı ilk sayı-  
nın üç katı oluyor. Bu sayıyı bulunuz ? (C : 142857)

**Karışık sayı problemleri :**

36)  $30 \times 147$  çarpımında çarpanların her birinden aynı sayı çıkarılıyor ve  
 $14 \times 62$  çarpımında ise çarpanların her birine o sayı ekleniyor. Sonuçlar aynı çı-  
kıyor. Çarpanlara eklenen sayıyı bulunuz ?  $30-x$  ( $147-x$ ) = ( $14+x$ ) ( $62+x$ )  
denklemini çözünüz.

37) Bir öğrenciye sınıfınız kaç kişi diye sormuşlar. Öğrenci de : Bizim sayı-  
mızın iki katını al, onu üçle çarپip dörde böл, elkanın üstüne beni bir daha say 100  
oluruz demiş. Sınıfın mevcuduunu bulunuz ? (C : 66)

38) Bir dükkan sahibi bir fiçı sırkenin derecesini düşürmek gavesi ile sırkeye  
12 litre su katıyor. Sonra bu karışımı, alış verişte kolaylık olsun diye, dört eşit bü-  
yükükteki kaplara dolduruyor. Dükkanı bu kaplardan birinden 7 litre satıyor. Ka-  
tan karışım 9 litre olduğuna göre aldığı saf sırke kaç litre idi ? (C : 52)

39) Beden eğitimi dersindeki çalışmamıza diğer sınıftan 4 arkadaş iştirak etti.  
Derste öğretmenimiz bizi 3 eşit guruba ayırarak çeşitli çalışmalarla yolladı. Grubu-  
muzda bulunan Ahmed, kum havuzundan atlarken ayağı sakatlanarak çekildi, böylece  
biz 12 kişi kaldık acaba sınıfımızın mevcudu nedir ? (C : 35)

40) Bahçemize 25 tane fidan dikmek istiyorum. Fakat elimde bulunan fidanlarım bir kısmını arkadaşım için ayırsam, bana yarısı kalmış olacak. Eğer bana kalan fidanların sayısı 2 tane daha fazla olsaydı, bahçemize istediğim miktarda fidan dikenlecektim. Acaba elimdeki fidanlar kaç tanedir? (C : 46)

41) Koray, kardeşi Gülay'dan 10 lira alındıktan sonra parası Gülay'ın parasından 6 lira fazla oluyor. Her ikisinin paraları toplamı 40 lira olduğuna göre paralarını esaplayınız? (C : 13 ; 27)

42) 10 000 biletin, dolu biletlerin yarısı boş numaraların üçte birine eklenirse 3 500 bilet oluyor. Piyangodaki dolu bilet sayısını bulunuz? (C : 1000)

43) Bir sürü arıdan  $\frac{1}{5}$  i bir çiçege  $\frac{1}{3}$ 'ü de diğer bir çiçege konmuş. Bu iki takımlı sayıları farkının üç katı arı da başka bir çiçege doğru uçmuş: geriye bir arı kalmış. Arıların kaç tane olduğunu bulunuz? (C : 15)

44) İki şirketin paraları toplamı 33 000 liradır. Bu ştardan birinci şirketin parasının  $\frac{1}{3}$  ü ile  $\frac{1}{4}$  ü toplamı diğerinin  $\frac{7}{10}$  sine eşit olduğuna göre her birinin paralarını bulunuz? (C : 18 000 ; 15 000)

45) Ahmet, Mehmed'e 6 tane bilyam daha olsa sendeki kadar bilyam olur. Mehmed, Ahmed'e bana 6 bilya daha verseler sendekinin iki katı olur. diyor. Ahmet ve Mehmed'in bilyalarının sayısını bulunuz? (C : 12 ; 18)

46) Bir adam, bir kravat, bir gömlek ve bir pantolon alarak dükkâncıya 8250 kuruş veriyor. Gömleğe kravatın 8 katı, pantalona da gömleğin 3 katı para verdiğine göre her birine verilen parayı bulunuz? (C : 250 ; 2000 ; 6000)

47) Bir çiftçi üç öküz ve dört ineğe 732 lira veriyor. Bir öküz bir inekten 48 dira fazla olduğuna göre çiftçi bir öküz ve bir ineği kaçı almıştır? (C : 132 ; 84)

48) Bir satıcı 12 defterle 16 sulu boyaya 32 lira veriyor. Her sulu boyaya, her defterden 45 kuruş fazla ettiğine göre her birinin parasını bulunuz? (C : 90 kr.; 135 kr.)

49) Bir karpuzcu 5 şı iki liradan bir miktar karpuz aldı. Bunların yarısını, ikisini bir liradan, diğer yarısını da üçünü bir liradan sattı, ve dört lira kazandı. Karpuzların sayısını bulunuz? (C : 340)

50) Metin'in 72 Bilhan'ın ise 52 bilyası vardı. Aralarında bir hayli oyun oynadıkları sonra Metin'in bilyası Bilhan'ın bilyasının 3 katı oldu. Metin kaç bilya kazanmış oluyor? (C : 21)

51) Ahmet bahçesinden getirdiği eriklerden arkadaşlarına 4 der verse sepette 27 erik kalıyor. Sepette bir erik daha olsaydı her arkadaşa 6 şar erik verebilecekti. Ahmed'in arkadaşlarının sayısını bulunuz? (C : 14)

52) Ali'nin 100 lirası Veli'nin 48 lirası var. Veli'nin o gün sarfettiği para Ali'ninkinin iki katı oldu. Ali'de, Veli'de kalan paranın üç katı kadar para kaldığına göre her birinin sarfettikleri paraları bulunuz? (C : 88 ; 44)

53) Bir adam arabasındaki karpuzların yarısının ikisini bir liraya, diğer yarısını da üçünü bir liraya almış. Bunların begini 2 liraya satarak bir lira zarar etmiş. Adamın aldığı karpuzların sayısını bulunuz? (C : 60)

54) Bir adam 1457 lira ile 200 adet kuzu ve oğlak alıyor. Kuzular 8 liradan, oğlaklar 7 liradan olduğuna göre her birinden kaçar tane almıştır? (C : 57 kuzu ; 143 oğlak)

55) Cebimdeki 5 ve 10 kuruşlukların sayısı 20 dir. Toparı 100 ettiğine göre her birinden kaç tane olduğunu bulunuz? (C : 8 ; 12)

56) Bir kümeste karışık olarak tavşan ve tavuklar vardır. Bu hayvanların başlarının toplamı 35 ayaklarının toptan sayısı ise 94dür. Kümeste kaç tavşan ve kaç tavuk vardır? (C : 12 tavşan ; 23 tavuk)

57) 23 metre ipekli ve 50 metre yünlüye 370 lira veriyoruz. İpeklinin fiyatı yünün fiyatının 6 katı olduğuna göre her birinin metresinin fiyatını bulunuz? (C : 12 lira ; 2 lira)

58) Bir bahçevan pazara getirdiği domatesin kilosunu 35, biberin kilosunu 40 kuruştan satarak 39 lira alıyor. Domatesler biberlerden 15 kg. fazla olduğuna göre, bahçevan ne kadar domates ve ne kadar biber satmıştır? (C : 60 ; 45)

59) 3120 kuruşa 20 kaz ve 8 tavuk alınıyor. Her tavuçun fiyatı kazın fiyatının  $\frac{3}{4}$  ü kadar olduğuna göre, kazın ve tavuçun fiyatını bulunuz? (C : 120 ; 90)

60) Bir otobüste ferdek sayıları kadınların üç katı iken, 8 karı koca indikten sonra 5 katı oluyor. Otobüste evvelce kaç erkek ve kaç kadın olduğunu bulunuz? (C : 48 ; 16)

61) Bir bahçedeki banklara öğrenciler 5 şer oturtulsa 17 kişi ayakta kalıyor, 8 er oturtulsa 4 kişilik boş yer kalmıyor. Bahçede kaç sıra ve öğrenci vardır? C : (7 sıra 52)

### B — Yaş problemleri:

Örnek 1) Baba ile oğlunun yaşları toplamı 36 dir. 3 yıl sonra babanın yaşı oğlunun yaşıının 5 katı olacağına göre her birinin yaşıını bulunuz.

Çözümü :	Babanın	Oğlunun
Şimdiki yaşları	$x$	$36-x$
3 yıl sonraki yaşları	$x+3$	$36-x+3$
Denklem :	$x+3=5(36-x+3)$	
Çözüldürse ;	Babanın yaşı $x=32$	

Oğlunun yaşı  $36-x=4$  bulunur.

Örnek 2) 8 yıl önce babanın yaşı çocuğunun yaşıının 4 katı ve 12 yıl sonra 2 katı olduğuna göre babanın ve çocuğunun yaşlarını bulunuz.

Çözümü :	Çocuğa 8 yıl önceki yaşı .....	$x$ olursa,
	$\rightarrow$ 12 yıl sonraki .....	$x+20$ olur.
	Babanın 8 yıl önceki yaşı .....	$4x$ olursa,
	$\rightarrow$ 12 yıl sonraki .....	$2(x+20)$ olur.

Denklem : Babanın ve çocuğun 8 yıl önceki yaşları farkı ile 12 yıl sonraki yaşları farklı birbirine eşit olacağını.

$$2(x+20) - (x+20) = 4x - x$$

bağlılığını yazabiliriz. Denklem çözülürse :

$$x=10 \quad \text{bulunur.}$$

**Cocuğun yaşı**

$$x+8=10+8=18$$

**Babanın yaşı**

$$4x+8=4 \cdot 10+8=48 \quad \text{olur.}$$

### Sorular :

1) Bir adam kızının beş katı yaşındadır. Üç yıl önce bu adamın yaşı kızının zamanki yaşıının 8 katı olduğuna göre yaşıları bulunuz. (C : 35 ; 7)

2) Gülay ve Korayın yaşıları eşittir. Gülayın yaşı 36, Korayın yaşı 52 arttırlıncaya yaşılarının oranı  $\frac{3}{4}$  ye eşit oluyor. Her birinin yaşıını bulunuz? (C : 12)

3) Ahmed'in yaşı Niyazi'nin yaşıının 2 katıdır. 10 yıl önce her ikisinin yaşıları toplamı Ahmed'in şimdiki yaşına eşit olduğuna göre yaşıları bulunuz. (C : 40 ; 20)

4) Korey 36 yaşında iken 3 yaşında bir kızı vardı. Kaç yıl sonra babasının yaşı kızının yaşıının 4 katı olacaktır? (C : 8)

5) Ahmed kardeşinin 4 katı yaşındadır. Bir yıl önce Ahmed'in yaşı kardeşinin yaşıının 5 katından bir fazla olduğuna göre yaşılarını bulunuz? (C : 12 ; 3)

6. 20, 10 ve 13 yaşlarındaki üç kardeşin babaları 47 yaşındadır. Kaç yıl sonra çocukların yaşıları toplamı babanın yaşına eşit olur? (C : 2)

7) Bir baba ile iki çocuğunun yaşıları toplamı 60 dır. Büyük kardeş küçüğün üç katı ve babaları ise iki çocuğun yaşıları toplamının iki katı yaşındadır. Her birinin yaşıını bulunuz? (C : 5 ; 15 ; 40)

8) Bir baba, iki çocuğunun yaşıları toplamından 35 yaş büyüktür. İki yıl sonra onların yaşıları toplamına eşit olacağına göre babanın yaşıını bulunuz? (C : 64)

9) Üç çocuktan büyüğünün yaşı diğer ikisinin yaşıları toplamına eşittir. Diğer iki çocuğun yaşıları oranı  $\frac{2}{3}$  dır. 10 yıl sonra büyük çocuğun yaşı diğer iki çocuğun yaşıları toplamının yarısından 5 fazla olacağına göre her çocuğun yaşıını bulunuz? (C : 10 ; 6 ; 4)

10) Bir babanın yaşı büyük oğlunun yaşıının 4 katı, küçük oğlunun yaşıının beş katıdır. Büyük oğlu şimdiki yaşıının üç katı yaşına geldiği zaman babanın yaşı küçük oğlunun yaşıının iki katından 3 fazla olacaktır. Her birinin yaşılarını bulunuz? (C : 30 ; 7,5 ; 6)

11) Baba 35 oğlu 10 yaşındadır. Kaç yıl sonra yaşıları farkı yaşıları toplamının  $\frac{3}{8}$  ü kadar olur? (C : 10  $\frac{5}{6}$ )

12) Güner'le Gülay'ın yaşıları oranı  $\frac{2}{5}$  dır. 30 yıl sonra bu oranı  $\frac{23}{35}$  olacağına göre yaşıları bulunuz. (C : 16 ; 40)

### C — Faiz problemleri:

Örnek 1) 1000 lira parası olan bir adam, parasının bir kısmını  $\% 4$  den geri kalanını  $\% 5$  den faiz veriyor. Bir sene sonunda her ikisinden 44 lira faiz aldığına göre  $\% 4$  ve  $\% 5$  den verdiği paraları bulunuz.

$$\text{Çözümü : } \frac{\% 4 \text{ den verilen}}{x} \quad \frac{\% 5 \text{ den verilen}}{1000-x}$$

$$\text{Yıllık faizler : } \frac{4x}{100} \quad \frac{5(1000-x)}{100}$$

$$\text{Denklem : } \frac{4x}{100} + \frac{5(1000-x)}{100} = 44$$

Çözülürse ;

$$\% 4 \text{ den verilen para} \quad x=600$$

$$\% 5 \text{ den } \rightarrow \rightarrow 1000-x=1000-600=400 \text{ lira olur}$$

Örnek 2) Koray parasının  $\frac{2}{5}$  ini  $\% 5$  den, kalanını  $\% 4$  den faiz veriyor. Her ikisinden 3 ay sonra 27 lira faiz aldığına göre Koray'ın parmasını bulunuz

$$\text{Çözümü : } \frac{\% 5 \text{ den verilen}}{\frac{2x}{5}} \quad \frac{\% 4 \text{ den verilen}}{x - \frac{2x}{5} = \frac{3x}{5}}$$

$$\text{Üç aylık faizler : } \frac{\frac{2x}{5} \cdot 3 \cdot 5}{1200} = \frac{x}{200} \quad \frac{\frac{3x}{5} \cdot 3 \cdot 4}{1200} = \frac{3x}{500}$$

$$\text{Denklem : } \frac{x}{100} + \frac{3x}{500} = 27$$

$$\text{Çözümü : } x=3000 \quad \text{bulunur.}$$

### Sorular :

1) 8000 lira paramızın bir kısmını  $\% 4$  den 5 yıl, geri kalanını  $\% 3,5$  dan 3 yıl ayrı iki bankada bekletiyoruz. Paramız faizleriyle birlikte 9125 liraya balık oluyor. Her bankaya yatırdığımız paraları bulunuz? (C : 3000 ; 5000)

2) Bir adam parasının üçe birini  $\% 3$  den 2 yıl, kalanını  $\% 4$  den 3 yıl faizde bekletiyor. Her ikisinden 600 lira faiz aldığına göre adamın parasını bulunuz? (C : 6000)

3) 35000 lira paramızın bir kısmını  $\% 3$  den 2 yıl, geri kalanını  $\% 3,5$  dan 3 yıl bankada bekletiyoruz. Her ikisinden bu zamanlar içinde 3000 lira faiz aldığımıza göre  $\% 3$  ve  $\% 3,5$  den faize verilen paraları bulunuz? (C : 15000 ; 20000)

4) 10 500 lira paramızın bir kısmını  $\frac{1}{3}$  den, geri kalanını  $\frac{1}{2} \cdot 3.5$  dan ayrı iki bankaya veriyoruz. 2 yıl sonunda her ikisinden 660 lira faiz alıyoruz. Her bir bankaya verilen paraları bulunuz? (7500 ; 3000)

5) 10 000 lira paramızın bir kısmını  $\frac{1}{3}$  den 2 yıl bir bankaya, geri kalanını da  $\frac{1}{2} \cdot 2.5$  den 3 yıl başka bir bankada faize veriyoruz. İkisinden 705 lira faiz aldığımızda göre her bankaya verilen paraları bulunuz? (C : 3000 ; 7000)

6) Parasının  $\frac{2}{3}$  sini  $\frac{1}{4}$  den,  $\frac{1}{4}$  ini  $\frac{1}{3}$  den kalanını  $\frac{1}{2}$  den faize vermiş olan bir adamın yıllık geliri 430 lirasıdır. Parayı bulunuz? (C : 12000)

7) Bir adam 120 000 lira parasının bir kısmına bir ev alıyor. Geriye kalan parasının üçte birini  $\frac{1}{4}$  den üçte ikisini de  $\frac{1}{5}$  den faize veriyor. Bir yılda 3920 lira faiz alıyor. Evin parasını ve faize yatırılan parası bulunuz?

(C : Evin parası 36000,  $\frac{1}{4}$  den verilen 28000 diğer 56000)

8) Üç kapital faize veriliyor. Birinci  $\frac{1}{5}$  den 4 yıl, ikinci  $\frac{1}{4}$  den 3 yıl 9 ay, üçüncü de 2 yıl 8 ay faizde kalıyor. Üç kapitalın getirdiği faizlerin toplamı 2646 liradır. İkinci kapital birincinin iki katı, üçüncü kapital ikincinin üç katı olduğu bildiğine göre kapitalleri bulunuz? (C : 2700 ; 5400 ; 16200)

9) Bir adam parasını birbirine eşit olmayan üç parçaya ayıracak aşağıdaki şekilde faize veriyor:

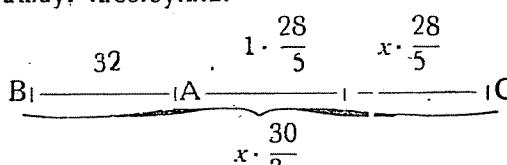
Birinci  $\frac{1}{4.5}$  den 3 yıl 8 ay, birincinin iki katı olan ikinciyi  $\frac{1}{5}$  den 3 yıl 5 ay ve ikincinin üç katı olan üçüncüyü de  $\frac{1}{4}$  den 3 yıl 9 ay müddetle faize veriyor. Hepsinden 14150 lira faiz alıyor. Adamın parasını ve faize verdiği parçaları bulunuz? (C : 90 000, 10 000 ; 20 000 ; 60 000)

10) Bir tüccar parasını her yıl üçte biri kadar arttırıyor ve içinden 1000 lira'sını o yıl sarf ediyor. 3 yıl sonunda parası iki katına çıkıyor. Adamın başlangıçta parasının ne kadar olduğunu bulunuz? (C : 11100 lira)

#### D — Hareket problemleri:

Örnek 1) 5 saatte 28 km. yol giden bir bisikletli A dan hareket ediyor. 32 km. geride bulunan B den, bir saat sonra 3 saatte 30 km. giden bir motosikletli harekete geçiyor. Öndeki bisikletliye ne zaman yetişir?

**Cözüm :** Hızlar,  $\frac{28}{5}$  ve  $\frac{30}{3}$  dür  $x$  saat sonra kavuştuklarına göre, aşağıdaki şamayı inceleyiniz.



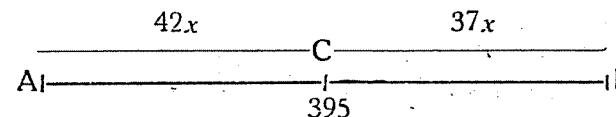
$$\text{Denklem : } 32 + \frac{28}{5} + \frac{28}{5}x = \frac{30}{3}x$$

$$480 + 84 + 84x = 150x$$

$$x = 8 \frac{4}{23} \text{ saat sonra kavuşur.}$$

Örnek 2) Aralarında 395 km bulunan iki yerden birbirine karşı biri saatte 42 km diğer 37 km hızla iki tren harekete geçiyorlar. Kaç saat sonra kavuşurlar?

**Çözümü :**  $x$  saat sonra kavuştuklarına göre, aşağıdaki şamayı inceleyiniz.



Denklem :  $42x + 37x = 395$

$x = 5$  saat

#### Sorular:

1) Aralarında 30 km mesafe bulunan iki kasabadan, aynı yönde ve aynı anda, öndekinin hızı 10 km olan bir bisikleti ile, arkadakinin hızı 20 km olan bir kamyon hareket ediyorlar. 5 saat gittiklerine göre arkadaki öndekini ne kadar geçer? (C : 20 km)

2) Aralarında 420 km olan iki yerden aynı zamanda birbirine doğru iki katar arakete geçiyorlar. Birinin sür'atı 45 km diğerinin 60 km olduğuna göre kaç saat sonra kavuşturacaklarını bulunuz? (C : 4 saat)

3) Aralarında 600 km bulunan iki şehirden bir taksi ile bir kamyon karşılıklı harekete geçiyorlar. Taksi ortalama 60 km hızla hareket ediyor. Kamyonla, hattından 5 saat sonra karşılaşabilmesi için, ortalama 40 km hızla hareket eden kamyonun kaç saat evvel yola çıkması lazımdır? (C : 2,5 saat)

4) Aralarında 8 km mesafe bulunan iki bisikletliden, arkadaki öndekinden 1 saat sonra ve ondan 6 km fazla hızla hareket ediyor. 3 saat sonra öndekine yetiştiğine göre hızları ne kadardır? (C : 10 ve 16 km)

5) Aralarında 220 km olan iki şehirden aynı zamanda iki otomobil birbirine doğru hareket ediyor. Birinin hızı diğerinden 5 km fazla olan bu iki otomobil beraberce iki saat yol aldıktan sonra aralarında 50 km lik mesafe kalmıştır. Hızlarını bulunuz? (C : 40 ve 45 km)

6) Aralarında 60 km bulunan iki yerden hızları saatte 25 km ve 10 km olan ve aynı yönde hareket eden iki hareketliden, hızı 25 km olan arkadaş, hareketine 5 saat sonra başlıyor ve beraber olarak ta 6 saat gidiyorlar. Aralarında kaç km yol kalır? (C : 20 km)

7) Aralarına 400 km mesafe bulunan iki şehirden karşılıklı olarak birinin hızı diğerininin yarısından 5 fazla olan iki otobüs hareket ediyor. Hızı az olan diğerinden 3 saat sonra yola çıkıyor ve beraberce 2 saat gittikten sonra aralarında hızı az olanın 3 saatte gidebileceği bir yol kalmıyor. Acaba otobüslerin hızları kaçtır? (C : 50 ve 30 km)

8) Uluborlu ve Senirkent kasabalarından iki yaya karşılıklı olarak yola çıkıyorlar. Uluborlu'dan çıkan saatte 5 km, Senirkent'ten çıkan saatte 3 km yol alıyor. Senirkent'ten çıkan, bir saat önce yola çıkıyor. Bir saatte beraber yürüdüklerinde aralarında bir km yol kalmıyor. Uluborlu ile Senirkent arası kaç km dir? (C : 12 km)

9) İnegöl Bursa arası 45 km dir. İnegöl'den saatte 15 km hızla giden bir yük kamyonu Eskisehir'e doğru hareket ediyor. İki saat sonra Bursa'dan saatte 25 km hızla giden diğer bir kamyonda Eskisehir'e doğru yola çıkarıyor. İkinci kamyon birinci kamyonca kaç saat sonra yetişir? (C : 7,5 saat)

10) Bandırma ile Balıkesir arası 100 km dir. Balıkesir'den ortalama hızı 40 km olan bir otobüs Aydınl'a doğru hareket ediyor. Bu otobüsün hareketinden 2 saat sonra hızı 60 km olan bir taksi Bandırma'dan yine Aydınl'a doğru hareket ediyor. Acaba kaç saat sonra taksi ile otobüs birleşirler? (C : 9 saat)

11) A ve B şehirleri arası 600 km dir. Bir ekspres A şehirinden saat 9 da hizete geçiyor. Saat 11 de B şehirinden de A şehrine doğru bir marşandiz hareket ediyor. Bunlar saat dörtte bir C şehrinde karşılaşıyorlar. Marşandisin hızı, ekspresin hızının yarısından 10 km eksik olduğuna göre, hızları kaçar km dir? (C : 80 ve 30 km)

12) Aralarında bir miktar mesafe bulunan A ve B şehirlerinin birinden hızı saatte 35 km olan bir otobüs, diğerinden de hızı saatte 20 km olan bir traktör aynı anda ve aynı yöne doğru hareket ediyorlar. 3 saat sonra aralarında 25 km kalıyor. A ve B şehirleri arası kaç km dir? (C : 20 km)

13) Bir saat öğleyi göstermektedir. Ne zaman yelkovan ile akrep birbirini üzerine gelecektir? (C : 1 ri 5 dakika,  $\frac{5}{11}$  saniye geçe)

14) Bir saatin akreple yelkovan üç ile dört arası saat kaçta karşı, karşıya bulunurlar? (C : 3  $\frac{49}{11}$  dakika geçe)

15) Bir saatin akreple yelkovanı saat ücü birbirine dik durumda olurlar. Buna dan sonra saat kaçta yine birbirine dik olurlar? (C : 3  $\frac{3}{2} \frac{8}{11}$  dakika geçe)

### E — Ortak iş görme problemleri:

Örnek 1) Bir amele bir işi yalnız başına 9 günde, diğer bir amele ise aynı işi yalnız başına 12 günde bitiriyor. Bu amelerler beraber çalışsalar aynı işi kaç günde bitirirler?

Çözümü : Beraberce  $x$  günde bitireceklerini düşünelim.

Birinci amele bir günde işin  $\frac{1}{9}$ unu,  $x$  günde ise  $\frac{x}{9}$ unu görür.

İkinci amele bir günde aynı işin  $\frac{1}{12}$  sini,  $x$  günde  $\frac{x}{12}$  sini görür.

$x$  günde ikisi birden çalışırlarsa işi bitireceklerinden işin kesirlerini toplamının 1 eşit olması lâzımdır.

Denklem :  $\frac{x}{9} + \frac{x}{12} = 1$

Çözülürse :  $x = 5 \frac{1}{7}$  gün bulunur.

Örnek 2) Bir havuz bir muslukla 6 saatte, ikinci bir muslukla 8 saatte doluyor. Bu havuzu 12 saatte boşaltabilen dipte bir musluğunu bulun.

duğuna; havuz boşken her üç musluk beraberce açıldığına göre havuzun kaç saatte dolabileceğini bulunuz;

Çözümü : Havuz  $x$  saatte dolabilse;  $x$  saatte :

Birinci musluk havuzun  $\frac{x}{6}$  sini, ikinci  $\frac{x}{8}$  ini doldurur. Üçüncü ise  $\frac{x}{12}$  sini boşaltır.  $x$  saat zarfında havuz tamamen dolacağından;

Denklem :

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{8} - \frac{x}{12} = 1$$

olar. Çözülürse,

$$x = 4 \frac{4}{5} \text{ saat bulunur.}$$

### Sorular :

1) Bir havuzu bir musluk 3 saatte ikinci musluk 2 saatte doldurmaktadır. İkisi birden aktığı zaman havuzu ne kadar zamanda doldururlar? (C :  $1 \frac{1}{5}$  saat)

2) Üç işçi bir işi 3 günde bitiriyorlar. Bunlardan biri yalnız başına bu işi 9 günde ikincisi 12 günde bitirse, üçüncü işçi bu işi yalnız başına kaç günde bitirir?

3) Dört fiskiyemiz var. Birinci fiskiye havuzu bir, ikincisi iki, üçüncüsü üç, dördüncüsü dört günde dolduruyor. Hepsi birden aksalar havuzu ne kadar zamanda doldururlar? (C :  $\frac{12}{25}$  gün )

4) Ahmed'in günde görevlendiği iş Mehmed'in gördüğü işin yarısı kadar, Mehmed'in gördüğü iş ise Hasan'ının yarısı kadardır. Üçü birlikte çalışarak bu işi 24 günde bitiriyorlar. Acaba bu işi her biri kaç günde bitirirler? (C : 168 ; 84 ; 42)

5) Bir havuz, musluğun yalnız biri ile 6 saatte diğer ile 8 saatte dolabiliyor. Ve diğer bir muslukla da dolu havuz 12 saatte boşalabiliyor. Bu üç musluk birden açılsa boş havuz kaç saatte dolar? (C :  $4 \frac{4}{5}$  saat )

6) 12 dakika zarfında iki muslukla dolan bir havuz yalnız bir muslukla 20 dakika doluyor. Diğer muslukla havuz kaç dakikada dolar? (C : 30 dakika)

7) Bir havuz bir muslukla  $4 \frac{1}{4}$  saatte diğer bir muslukla 6 saatte doluyor. Bu havuzu 5 saatte boşaltabilen birde çatlağı olsa, bunların hepsi açık olduğu takdirde havuzun ne kadar zamanda dolacağını bulunuz?

8) İki işçiden biri, bir işin  $\frac{2}{3}$  sini  $\frac{5}{3}$  saatte bitirir; üzere 7 günde, diğer işin  $\frac{3}{5}$  ünü 7 saat çalışmak şartı ile 8 günde bitiriyor. İkişi birden günde 6 saat çalışmak üzere işin tamamını kaç günde bitirirler? (C : 3,6)

9) İki musluktan biri dakikada  $5 \frac{3}{4}$  litre diğer saatta 1,90 hektolitre su akıtmak üzere 462 litrelik bir havuza aktıyorlar. Havuzun bir delikten dakikada  $1 \frac{1}{8}$  litre su kaybettiği bilindiğine göre havuzun kaç saatte dolacağını bulunuz? (C : 53  $\frac{3}{20}$ )

### F — Karışım problemleri:

**Örnek 1:** Saf ispirto oranı % 70 olan 120 litre ispirto ile saf ispirto oranı % 60 olan 35 litre ispirto karıştırılıyor. Elde edilen ispirtonun yüzde oranı ne olur?

**Çözümü:** Karışımın oranı  $\frac{x}{100}$  olsun.

$$\text{Birinci ispirtodaki saf ispirto } 120 \cdot \frac{70}{100}$$

$$\text{İkinci ispirtodaki } " \quad " \quad 35 \cdot \frac{60}{100} \text{ dir.}$$

Karışımın (Yani  $120 + 35 = 155$  litrenin) İçindeki saf ispirto ise,

$$155 \cdot \frac{x}{100} \text{ olur.}$$

$$\text{Denklem: } 120 \cdot \frac{70}{100} + 35 \cdot \frac{60}{100} = 155 \cdot \frac{x}{100}$$

$$\text{Çözülürse: } x = 67 \frac{23}{31} \text{ bulunur.}$$

$$\text{Şuhalde karışımın ispirto oranı \% } 67 \frac{23}{31} \text{ dir.}$$

**Örnek 2:** Bir fırçada 12 litre saf alkol ve 18 litre su var. Diğer bir fırçada ise 9 litre saf alkol ve 3 litre su vardır. Bu fırçıardaki alkoller, dan 7 litresi saf alkol 7 litresi su olmak üzere 140 litre yeni bir alkol elde edebilmemiz için her fırçadan kaçar litre almalıdır?

**Çözümü:** Birinci fırçadan  $x$  litre aldığımizi düşünürsek ikinci fırçadan  $14 - x$  kadar almadız lâzımdır.

Birinci fırçadaki saf alkol miktarı  $\frac{12}{30}$  olduğuna göre,  $x$  litredeki saf alkol  $\frac{12x}{30}$  kadardır.

$$\text{Aynı şekilde ikinci fırçadaki saf alkol } \frac{9(x-14)}{12} \text{ olur.}$$

$$\text{Denklem: } \frac{12x}{30} + \frac{9(x-14)}{12} = 7$$

$$\text{Çözülürse: } x = 10 \text{ bulunur.}$$

1.inci fırçadan 10 litre

2.inci fırçadan  $14 - 10 = 4$  litre almak lâzımdır.

### Sorular:

1) Kilosu 180 ve 130 kuruşluk iki cins prinçten kaçar kilo karıştırıldığında 50 kilo 160 kuruşluk prinç elde edilsin? (C : 30 ; 20)

2) Litresi 45 kr dan 100 litre sirkeye litresi 60 kr luk sırkeden ne kadar karışım ki karışımın litresi 50 kuruşa gelsin? (C : 50)

3) Bir adam iki ayrı cins 25 kg buğdayı 2280 kuruşa aldı. İyisini kilosu 100 kötüsünün kilosu ise 70 kr olduğuna göre her birinden kaçar kg almıştır? (C : 4 ; 24)

4) Bir tüccar kilosu 32,25 kr tam 1600 kg 30 kr tan, 837 kg dan 763 kg aldığı üç cins buğdayı birbirleriyle karıştırıyor. Karışımın kilosu kaç kuruş eder?

5) Bir firmanın elindeki kilosu 41 kuruştan 480 kifo ve kilosu 43,5 kuruştan 390 kilo unu var. Diğer bir cins unun kilosu 38 kuruştur. Bundan kaç kilo elindekilere karıştırmalıdır ki kilosu 40 kuruşluk un elde etsin?

6) Bir bakkalda her kilosu 100 kr ve her kilosu 200 kr luk iki cins prinç var. Her kilosu 170 kr değerinde 100 kilo prinç elde etmesi için her birinden kaçar kilo karıştırmalıdır? (C : 30 ; 70)

### Paylaşma problemleri:

1) 50 lirayı üç kişi arasında aşağıdaki şekilde paylaştırınız. Birinci ikinciden 5 lira fazla, üçüncü ise diğer ikisinin toplamı kadar olsun (C : 10 ; 15 ; 25)

2) 76 lirayı üç kişi şu şekilde paylaştırınız. Birinci ikinciden 10 lira fazla alıyor. Üçüncü birinci ile ikincinin toplamı kadar alıyor. Her birine düşen paraları bulunuz? (C : 14 ; 24 ; 38)

3) 155 lirayı üç kişi arasında şöyle paylaştırınız. İkinci birinciden 15 lira fazla, üçüncü de ikinciden 20 lira fazla alıyorlar. Her birine düşen parayı bulunuz? (C : 35 ; 50 ; 70)

4) 85 lirayı üç kişi arasında öyle paylaştırınız, ki birinci ikineiden 7 lira fazla, üçüncüde ikinciden 15 lira eksik olsun? (C : 38 ; 31 ; 16)

5) 350 lirayı üç kişi arasında aşağıdaki şekilde paylaştırınız. Birinci ikinciden 5 lira fazla ikincide üçüncüden 30 lira eksik olsun. Her birinin hissesini bulunuz. (C : 130 ; 125 ; 95)

6) 276 lirayı Ahmet, Bedri, Cahit aralarında paylaştırınız. Bedri Ahmed'in aldığından 12 lira fazla, Cahit ise Bedri'nin aldığından 3 katından 12 lira fazla alıyor. Her birine düşen paraları bulunuz? (C : 24 ; 60 ; 192)

7) 550 lirayı A, B, C, D gibi 4 kişiye aşağıdaki gibi taksim ediniz: B'nin aldığı A'nın aldığından iki katı, C ninki A ile B'nin toplamı, D ninki ise B ile C'nin katadır. Her birinin hisselerini bulunuz? (C : 50 ; 100 ; 150 ; 250)

8) Üç ortak bir miktar para kazanmışlar. Bulardan birinci kazancın  $\frac{1}{7}$  ini, ikinci  $\frac{1}{4}$  ini, üçüncü de kalan 17 lirayı almış. Kazandıkları parayı bulunuz. (C : 28)

9) Bir adam önce parasının  $\frac{3}{5}$  ünden 4 lira noksanını sanra geriye kalanın  $\frac{1}{4}$  ini den 3 lira fazlasını daha sonra da kalanın  $\frac{2}{5}$  si ile 1,20 lirasını sarfedor ve kendisine 24 lira kahiyor. Adamın parasını bulunuz? (C : 140 lira)

10) Bir baba parasını dört ogluna aşağıdaki şekilde pay ediyor. En büyüğü bütün paradan 800 lira eksik, ikinci ise bütün paranın dörtte birinden 120 lira fazla alıyor. Üçüncü en büyük kardeşim yarısını, en küçük de ikincinin aldığından üçte ikisini alıyor. Her birinin aldığı paraları bulunuz? (C : 2200 ; 1620 ; 1100 ; 1080)

11) 150 lirayı üç kişi arasında aşağıdaki şekilde paylaştırınız: İkinci birinciden 8 lira fazla üçüncüde ikinciden 14 lira fazla olsun? (C : 40 ; 48 ; 62)

12) Bir çantada bulunan paranın,  $\frac{1}{3}$  i çıkarılıp 100 kuruş konulsa ve bir müddet sonra da kalanın  $\frac{1}{4}$  i çıkarılıp 30 kuruş konulsa, çantadaki para eskisi kadar oluyor. Çantada önce kaç kuruş vardı? (C : 210)

13) Bir kimse parasının  $\frac{2}{7}$  sini bir oğluna, kalanın  $\frac{3}{5}$ 'ünü diğer oğluna, kalanın  $\frac{5}{12}$  sini de karısına veriyor. Geriye 175 lirası kalıyor? Adamın parasını bulunuz? (C : 1050)

14) Bir baba parasını üç oğluna aşağıdaki şekilde paylaştırmak istiyor. Birinci oğluna parasının  $\frac{1}{3}$ inden 5000 lira noksancını, ikinci oğluna kalanın yarısı ile 2000 lirayı, geri kalan 20000 lirayı da üçüncü oğluna veriyor. Babanın parasını bulunuz? (C : 58500)

15) 175 sayısını üç adama aşağıdaki şekilde paylaştırınız  
İkinci birinciden 15 fazla, üçüncü de ikisi toplamının  $\frac{2}{3}$  sini alınsın?  
(C : 45 : 60 : 70)

#### G — Geometri problemleri :

- 1) Bütününün beşte birine eşit olan açı kaç derecedir? (C : 30°)
- 2) Bir ikizkenar üçgende tepe açısı bir taban açısının yarısı kadardır. Üçgenin açılarını bulunuz? (C : 36°; 72°; 72°)
- 3) Bir ikizkenar üçgende eşit kenarlardan biri tabanın iki katıdır. Üçgenin çevresi 25 cm olsa kenarlar ne uzunlukta olur? (C : 5 ; 10 ; 10)
- 4) Bir ikizkenar üçgende tepe açısı bir taban açısının iki katıdır. Üçgenin açılarını bulunuz? (C : 90°; 45°; 45°)
- 5) ABC üçgeninde A açısı B açısından 10° büyük ve B açısı da C açısından 25 derece büyütür. Açıları bulunuz? (C : B = 65°; A = 75°; C = 40°)

6) Bir kabartma haritada yükseklikler uzunluklar birimine göre ancak  $\frac{1}{5}$  i kadar kabartılmıştır. Harita  $\frac{1}{10000}$  ölçüğindedir. Yükseklikleri 80 ve 120 metre olan iki dağ kabartma haritada ne yükseklikte gösterilmiştir? (C : 0,16 cm ; 0,24 cm.)

7) Bir dik üçgende hipotenüsün yükseklik, hipotenüsten ayırdığı parçaların küçüğünden 3 cm büyük ve büyüğünden 4 cm küçük olsa yüksekliğin uzunluğu ne olur? (C : h = 12 cm)

8) Bir yamukta paralel kenarlar arasındaki fark 3 cm yükseklik 6 cm dir. Alanı:  $98 \text{ cm}^2$  olduğuna göre paralel olan kenarların uzunluklarını bulunuz? (C : 15 : 18)

9) Kenarları ardışık üç çift sayı olan bir üçgenin çevresi 24 cm dir. Üçgenin kenarlarını bulunuz? (C : 6 ; 8 ; 10)

10) Hangi konveks çokgende iç açılarının toplamı 10 dik açıdır?  
 $(n - 2).2$  dik açılar = İç açı toplamı bağıntısından faydalansınız?

11) Çevresi 400 metre olan bir dik dörtgen var. Bu dikdörtgenin boyu 5 m, fazla, eni 5 m eksik olsaydı alanı esas alandan  $325 \text{ m}^2$  az olacaktı. Kenarları bulunuz? (C : 130 ; 70)

12) Alanı  $16800 \text{ m}^2$  olan bir yamuğun yüksekliği 32 m. dir. Küçük tabanı büyük tabanın  $\frac{5}{9}$  i olduğuna göre tabanların uzunluklarını bulunuz? (C : 375 ; 675)

#### BÖLÜM VII

##### Birinci dereceden iki bilinmiyenli denklem sistemleri

Tarif — İki bilinmiyenli denklem:

$x, y$  bilinmiyenlerine bağlı:

$$3x + 2y = 5 \dots, \dots \quad (1)$$

denklemi düşünelim. Bu denklemde bilinmiyenlerden birine vereceğimiz her bir değere karşılık diğer bilinmiyenin bir değerini bulabiliyoruz.

Meselâ:  $x = 1$  verirse  $3 + 2y = 5$  veya  $y = 1$  buluruz. Bunun gibi (1) denklemi sağlayan bir çok değer takımlarını bulabiliyoruz.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 5 \\ \hline x \mid \cdots -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \cdots \\ y \mid \cdots \frac{11}{2} & 4 & \frac{5}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Yukarıda görüldüğü gibi iki bilinmiyenli bir denklemin sorsaz çözümü vardır. Böyle bir denkleme *belirsiz denklem* denir.

##### A — Birinciden dereceden iki bilinmiyenli denklem sistemi:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

gibi iki bilinmiyenli iki denklem alalım. Bu denklemlerin ikisine birden *iki bilinmigenli denklem sistemi* veya *denklem takım* denir.

Bu iki denklemi (sistemi) aynı zamanda sağlayan  $x, y$  değerleri bu sistemin çözümü olur.

Sistemi aynı zamanda sağlayan  $x, y$  değerlerini (kök takımını) bulmak için değişik çözüm yolları vardır.

Değişik çözüm yollarının hepsinde esas olan; iki bilinmiyenin bulunan bu iki denklemden, bilinmiyenlerden yalnız birini içine alan tek bir denklem elde edebilmektir.

Yalnız bir bilinmiyeni bulunan bu tek denklemi de usulüne göre çözürengiz. (Bölüm: V).

Böylece bilinmiyenlerden birinin değeri bulunduktan sonra, bu değeri verilen denklemelerden herhangi birinde yerine koyarak diğer bilinmiyeni değerini buluruz.

**Not:** Değişik çözüm yollarının hepsinde; verilen iki denklem paylardan kurtarılır, çarpanlar yapılır, parantezler açılır ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra çözüm için değişik yollar kullanılabilir.

**1 — Birinci çözüm yolu : (Yoketme metodu)**

Verilen iki denklem basit şekele getirildikten sonra :

a) Bilinmeyenlerden birinin kat sayıları her iki denklemde eşit yapılır. (Denklemlerin her iki yanları uygun sayılarla çarpılır).

b) Bu iki denklem taraf tarafa toplanarak (veya çıkarılarak) bilinmeyenin biri yok edilir.

c) Geriye bir bilinmeyenli bir denklem kalır. Bu denklem çözülebek bilinmeyenlerden birinin değeri bulunur.

d) Bu değer denklemlerin herhangi birinde (çok zaman basit olana) yerine konarak diğer bilinmeyen bulunur.

$$\text{Örnek 1: } \begin{cases} 7x + 2y = 47 & \dots \dots (1) \\ 5x - 4y = 1 & \dots \dots (2) \end{cases}$$

sistemini çözünüz ;

**Cözümü :** Bu iki denklemde önce  $y$  i yok edelim.

(1) nci denkemin her iki tarafını 2 ile çarparım.

$$\begin{array}{rcl} (2) \text{ nci denklem} & 14x + 4y = 94 \\ \text{taraf tarafa toplayalım} & + \quad 5x - 4y = 1 \\ & 19x = 95 \\ & x = 5 \text{ bulunur.} \end{array}$$

(1) de  $x = 5$  koyarak.  $35 + 2y = 47$

$$y = 6 \text{ elde edilir.}$$

Şuhalde ; sistemi sağlayan çözüm takımı :

$$x = 5, y = 6 \text{ dir.}$$

$$\text{Örnek 2: } \begin{cases} 12x + 5y = 75 & \dots \dots (1) \\ 9x - 4y = 33 & \dots \dots (2) \end{cases} \text{ sistemini çözünüz.}$$

**Cözümü :**

(1) nci denklemi 4 ile çarparız  $48x + 20y = 300 \dots \dots (3)$

(2) " " 5 " "  $45x - 20y = 165 \dots \dots (4)$

(3) ve (4) denklemelerini taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned} 93x &= 465 \\ x &= 5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

(1) de  $x = 5$  koyarak ;

$$\begin{aligned} 60 + 5y &= 75 \\ y &= 3 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

**Sorular :**

Aşağıdaki denklem sistemlerini yok etme metoduna göre çözünüz ;

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) \quad 4x + y = 9 & 2^{\circ}) \quad 3x + y = 14 \\ .3x + 4y = 10 & x + 2y = 13 \end{array} \quad (x=2; y=1) \quad (x=3; y=5)$$

$$\begin{array}{llll} 3^{\circ}) \quad 4x + 7y = 29 & 4^{\circ}) \quad 2x - y = 9 & 4^{\circ}) \quad 2x - y = 9 & (x=4; y=-1) \\ x + 3y = 11 & 3x - 7y = 19 & 3x - 7y = 19 & \\ 5^{\circ}) \quad 5x + 6y = 17 & 6^{\circ}) \quad 2x + y = 10 & 6^{\circ}) \quad 2x + y = 10 & (x=3; y=4) \\ 6x + 5y = 16 & 7x + 8y = 53 & 7x + 8y = 53 & \\ 7^{\circ}) \quad 8x - y = 34 & 8^{\circ}) \quad 15x + 7y = 29 & 8^{\circ}) \quad 15x + 7y = 29 & (x=1; y=2) \\ x + 8y = 53 & 9x + 15y = 39 & 9x + 15y = 39 & \\ 9^{\circ}) \quad 14x - 3y = 39 & 10^{\circ}) \quad 28x - 23y = 33 & 10^{\circ}) \quad 28x - 23y = 33 & (x=2; y=1) \\ 6x + 17y = 35 & 63x - 25y = 101 & 63x - 25y = 101 & \\ 11^{\circ}) \quad 35x + 17y = 86 & 12^{\circ}) \quad 15x + 77y = 92 & 12^{\circ}) \quad 15x + 77y = 92 & (x=1; y=1) \\ 56x - 13y = 17 & 55x - 33y = 22 & 55x - 33y = 22 & \\ 13^{\circ}) \quad 5x - 7y = 0 & 14^{\circ}) \quad 21x - 50y = 60 & 14^{\circ}) \quad 21x - 50y = 60 & (x=10; y=3) \\ 7x + 5y = 74 & 28x - 27y = 199 & 28x - 27y = 199 & \end{array}$$

**2 — İkinci çözüm yolu (Yerine koyma metodu)**

Verilen iki denklem sisteminde :

- a) Denklemelerden birinden bilinmeyenin biri diğerini cinsinden bulunur.
- b) Diğer denklemde yerine konur.
- c) Böylece elde edilecek bir bilinmeyenli denklem çözülür.
- d) Bu bulunan değer, denklemelerden birinde yerine konur. İkinci bilinmeyenin değeri elde edilir.

$$\text{Örnek 1: } \begin{cases} 5x + 2y = 36 & \dots \dots (1) \\ 2x + 3y = 43 & \dots \dots (2) \end{cases} \text{ sistemini çözünüz ;}$$

$$\begin{aligned} \text{Çözümü: } (1) \text{ denkleminden } 5x &= 36 - 2y \\ x &= \frac{36 - 2y}{5} \dots \dots (3) \end{aligned}$$

bulunur.  $x$  in bu değeri (2) de yerine konur.

$$2 \left( \frac{36 - 2y}{5} \right) + 3y = 43$$

$$\frac{72 - 4y}{5} + 3y = 43$$

$$72 - 4y + 15y = 215$$

$$11y = 143$$

$$y = 13 \text{ bulunur.}$$

(3) de  $y = 13$  konarak :

$$x = \frac{36 - 26}{5}$$

$$x = 2 \text{ bulunur.}$$

**Örnek 2:**  $\begin{cases} 2x - 7y = -8 \dots\dots (1) \\ 3x + 2y = 13 \dots\dots (2) \end{cases}$  sistemini çözünüz.

**Çözümü :** (1) denklemden,  $2x = 7y - 8$

$$x = \frac{7y - 8}{2} \dots\dots (3)$$

bulunur. Bu değer (2) de yerine konarak :

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{7y - 8}{2}\right) + 2y &= 13 \\ 21y - 24 + 4y &= 26 \\ 25y &= 50 \\ y &= 2 \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

(3) de  $y = 2$  konarak,

$$\begin{aligned} x &= \frac{14 - 8}{2} \\ x &= 3 \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

### Sorular :

Aşağıdaki sistemleri yerine koyma metoduna göre çözünüz :

1º)  $4x + 5y = 4$       2º)  $3x + 5y = 50$   
 $5x - 3y = 79$       ( $x = 11; y = -8$ )      ( $x = 5; y = 7$ )

3º)  $5x - 7y = -21$       4º)  $4x - 3y = 0$   
 $21x - 9y = 75$       ( $x = 7; y = 8$ )      ( $x = 108; y = 144$ )

5º)  $3x - 4y = 2$ ,      6º)  $3x + 2y = 32$   
 $7x - 9y = 7$       ( $x = 10; y = 7$ )      ( $x = 2; y = 13$ )

7º)  $11x - 7y = 4$       8º)  $3x - 4y = 18$   
 $8x + 9y = 17$       ( $x = 1; y = 1$ )      ( $x = 2; y = -3$ )

9º)  $5x - 3y = 7$       10º)  $6x - 5y = 18$   
 $11x + 4y = 101$       ( $x = 7; y = 6$ )      ( $x = 6; y = 8$ )

11º)  $8x = 5y$       12º)  $3x = 7y$   
 $13x = 8y + 1$       ( $x = 5; y = 8$ )      ( $x = -7; y = -3$ )

13º)  $19x + 17y = 0$       14º)  $93x + 15y = 123$   
 $2x - y = 53$       ( $x = 17; y = -19$ )      ( $x = 1; y = 2$ )

**Not :** Geliş güzel verilen iki tane iki bilinmeyenli denklem, aşağıdaki hallerde bir sistem teşkil edemez.

a)  $\begin{cases} 2x - 4y = 3 \dots\dots (1) \\ 4x - 8y = 12 \dots\dots (2) \end{cases}$

gibi verilen bir sistem, gözönüne alalım. (1) in her iki yanını 2 ile çarpalım ; sistem,

$$\begin{aligned} 4x - 8y &= 6 \\ 4x - 8y &= 12 \end{aligned}$$

şekline girer. Dikkat edilirse bu sisteme birinci yanlar eşit olduğu halde ikinci yanlar eşit değildir. Ohalbde bu takıma uyabilecek bir çözüm bulunamaz. Bu denklem takımı imkânsızdır. Aşağıdaki sistemlerin imkânsız olduklarını göründür.

$$\begin{array}{lll} 6x + 9y = 4 & x - 4y = 1 & 2x + y = -3 \\ 4x + 6y = 5 & 3x - 12y = 1 & 6x + 3y = -1 \end{array}$$

b)  $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \dots\dots (1) \\ 12x - 6y = 24 \dots\dots (2) \end{cases}$

gibi verilen bir sistem, gözönüne alalım.

(1) in her iki yanını 3 ile çarpalım ; sistem :

$$\begin{aligned} 12x - 6y &= 24 \\ 12x - 6y &= 24 \end{aligned}$$

şekline girer. Ohalbde burada gerçekten yalnız bir denklem verilmiş oluyor. Bu sistem belirsizdir denir. Aşağıdaki sistemlerin belirsiz olduklarını göründür :

$$\begin{array}{lll} x - xy = 4 & 6x - 2y = 4 & 15x + 3y = 40 \\ 4x - 12y = 16 & 15x - 5y = 10 & 30x + -y = 80 \end{array}$$

3 —  $\begin{cases} ax + by = c \dots\dots (1) \\ a'x + b'y = c' \dots\dots (2) \end{cases}$

*Şeklinde genel olarak verilen bir sistemin çözümü ve irdelenmesi.*

**Çözümü :** (1)i  $b'$  ile (2)yı  $b$  ile çarpalım :

$$\begin{cases} ab'x + bb'y = b'c \dots\dots (3) \\ a'bx + bb'y = bc' \dots\dots (4) \end{cases}$$

(3) ve (4) taraf tarafa çıkarsak :

$$(ab' - a'b)x = b'c - bc' \dots\dots (5)$$

gibi bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. Bu denklemden  $x$  i bulmak için,

1º)  $ab' - a'b \neq 0$  ise  $\left( \text{veya } ab \neq ba', \text{ veya } \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \text{ ise} \right)$  :

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \dots\dots (6)$$

bulunur.  $x$  in bu değeri (1) de yerine konursa ;

$$a \cdot \frac{b'c - bc}{ab' - a'b} + by = c \dots\dots (7)$$

olur. Buradan ;

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \dots\dots (8)$$

elde edilir. Şuhalde sistemin kökleri :

$$x = \frac{b'c - bc}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'} \text{ dir.}$$

2°)  $ab' - a'b = 0$  ise (veya  $ab' = ba'$  veya  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b}$ ; ise) :

(5) denklemi ;

$$0 \cdot x = b'c - bc' \dots\dots (9)$$

olur. Burada iki ihtimal vardır.

Eğer,  $b'c - c'b \neq 0$  ise ; denklemenin çözümü yoktur. Verilen sistem imkânsızdır. Bu taktirde kat şartlar :

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

durumunda bulunurlar.

Eğer,  $b'c - c'b = 0$  ise ; (9) daki denklem,  $x$  in bütün değerleri için gerçekleşir.

$$b'c - c'b = 0 \text{ ve } ba' - ab' = 0$$

şartlarından kat sayılar arasında,

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

bağlılığı bulunur. Bu da bize (2) denklemenin, (1) denklemiin herhangi bir sayı ile çarpılmış şekli olduğunu gösterir. Şuhalde bu sistem tek denklem şeklinde olur ki belirsiz olur

3°)  $a = b = a' = 0$  olması halinde sistem ;

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c \dots\dots (10)$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c' \dots\dots (11)$$

şekline girer.

Eğer ;  $c \neq 0$  veya  $c' \neq 0$  ise sistemin çözümü imkânsızdır.

Eğer ;  $c = 0$ ,  $c' = 0$  ise çözüm belirsiz olur.

Özet olarak yukarıdaki irdelemeyi aşağıda görüldüğü gibi bir şema ile gösterebiliriz.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ}) ab' - a'b \neq 0 \\ \text{ise bir çözüm vardır} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{cb' - c}{ab' - a'b}$$

$$y = \frac{ac' - c'c}{ab' - a'b}$$

I)  $a, b, a'$  veya

$b' \neq 0$  ise

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \text{ ise imkânsızdır}$$

2°)  $ab' - a'b = 0$  ise

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \text{ ise belirsizdir.}$$

II)  $a = a' = b = b' = 0$  ise  $\left\{ \begin{array}{l} 1^{\circ}) c \text{ veya } c' \neq 0 \text{ ise imkânsızdır.} \\ 2^{\circ}) c = c' = 0 \text{ ise belirsizdir.} \end{array} \right.$

Görülüyör ki, birinci dereden iki bilinmiyenli genel bir sistemin bir çözüm vermesi için gerek ve yeter şart

$$ab' - ba' \neq 0 \text{ olmalıdır.}$$

Not :  $\left\{ \begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array} \right.$

gibi bir sistemi çözerken  $x$ ,  $y$  değerlerini hiç bir işlem yapmadan  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  kat sayıları ile aşağıda gösterildiği gibi bulabilirsiniz.

Katsayıları aşağıdaki gibi yan yana ve alt alta yazınız.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}$$

Aşağıdaki gibi, okla gösterilen kat sayıların çapraz çarpımları farkını alalım

$$I = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} = ab' - b'a$$

$$II = \frac{a}{a'} \times \frac{c}{c'} = ac' - a'c$$

$$III = \frac{b}{b'} \times \frac{c}{c'} = bc' - b'a$$

denklemenin kökleri ;

$$x = \frac{-III}{I}, \quad y = \frac{II}{I}$$

şeklindedir.

Bu türlü kök aramaya (Kramer) usulü denir.

$$\text{Örnek : } \begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ -x + 11y = 35 \end{cases}$$

Denklemi yukarıda gösterilen şekilde çözelim ; katsayıları :

$$\begin{array}{ccc} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 11 & 35 \end{array}$$

$$I = \frac{5}{-1} \times \frac{4}{11} = 55 - (-4) = 59$$

$$II = \frac{5}{-1} \times \frac{2}{35} = 175 - (-2) = 177$$

$$III = \frac{4}{11} \times \frac{2}{35} = 140 - 22 = 118$$

Kökleri :

$$x = \frac{-III}{I} = \frac{-118}{59} = -2$$

$$y = \frac{II}{I} = \frac{177}{59} = 3 \quad \text{bulunur.}$$

**Sorular :**

Aşağıdaki sistemlerin köklerini Gramer usulüne göre bulunuz.

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) \quad 2x+y=17 & 2^{\circ}) \quad 3x-2y=1 & 3^{\circ}) \quad 2x-3y=5 \\ -2x+2y=9 & -2x+3y=13 & 5x+y=13 \\ 4^{\circ}) \quad 4x-5y=18 & 5^{\circ}) \quad 5x+2y=79 & 6^{\circ}) \quad 6x-5y=0 \\ 4x-5y=-11 & 3x-4y=-15 & 2x-y=12 \end{array}$$

B - İki bilinmeyenli çeşitli denklem sistemlerine ait örnekler ve problemler :

1 — Kesirsiz denklem sistemleri :

$$\text{Örnek : } \begin{cases} 5(x+2y) - (3x+11y) = 14 \dots (1) \\ 7x - 9y - 3(x-4y) = 38 \dots (2) \end{cases}$$

sistemini çözünüz :

Bu çeşit denklemleri çözerken :

1°) Her denklemde çarpma ve parantez açma işlemleri yapılır.

$$\begin{aligned} 2^{\circ}) \quad \text{Sistem : } & ax + by = c \\ & a'x + b'y = c' \end{aligned}$$

gibi genel şekele getirilir.

3°) Yukarıda görülen çözüm yollarından biri kullanılarak kökler bulunur, (yok etme, yerine koyma, Gramer usullerinden biri.)

**Çözümü :**

$$\begin{aligned} (1) \text{ denklemi : } & 5x+10y-3x-11y=14 \\ & 2x-y=14 \dots (2) \end{aligned}$$

$$(2) \text{ denklemi : } 7x-9y-3x+12y=38$$

$$4x+3y=38 \dots (4)$$

şeklinde yazılırlar. Elde edilen :

$$2x-y=14 \dots (3)$$

$$4x+3y=38 \dots (4)$$

sistemi çözülürse  $x=8$ ,  $y=2$  kökleri bulunur.

**Sorular :**

Aşağıdaki sistemleri çözünüz :

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) \quad 2x-3y=-49 & 2^{\circ}) \quad x+3y=11 \\ -(x-8)-64=-5y & 5y-68=3(x-1) \\ (C : x=-11 ; y=9) & (C : x=-10 ; y=7) \\ 3^{\circ}) \quad 3(y-5)+2(x-3)=0 & 4^{\circ}) \quad 5(x+3)=2(y-1) \\ 7(x-4)-3(y+x-1)=14 & x-y=4(y+2) \\ (C : x=10 ; y=\frac{1}{3}) & (C : x=\frac{-44}{9} ; y=\frac{-67}{18}) \\ 5^{\circ}) \quad 2(2x+3y)=8(2x-3y)+10 & 6^{\circ}) \quad 5(x+2)-3(y+1)=23 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 & 3(x-2)+5(y-1)=19 \\ 7^{\circ}) \quad 6(x-7)-7(y-8)=18 & 8^{\circ}) \quad 3(2x-y)+4(x-2y)=87 \\ 8(x-9)-9(y-10)=26 & 2(3x-y)-3(x-y)=82 \\ 9^{\circ}) \quad 2(x+3)+3(y+4)=26 & 10^{\circ}) \quad 2(3x-4)+3(4y-6)=43 \\ 4(x+5)+5(y+6)=64 & 4(5x-6)+5(6y-7)=121 \\ 11^{\circ}) \quad (x-4)(y+7)=(x-3)(y+4) & 12^{\circ}) \quad (x+3)(y+5)=(x+1)(y+8) \\ (x+5)(y-2)=(x+2)(y-1) & (2x-3)(5y+7)=2(5x-6)(y+1) \\ 13^{\circ}) \quad (2x-1)^2+(y+3)^2=4x^2+(y+2)^2 & 9(x-1)^2+4(y+1)^2=(3x-2)^2+(2y+1)^2 \end{array}$$

— Kesirli denklem sistemleri :

Kesirli denklemleri çözürken :

1°) Önce payaların en küçük ortak katı bulunarak her iki denklem payadan kurtarılır.

2°) Çarpımlar yapılır, parantezler açılır.

$$\begin{aligned} 3^{\circ}) \quad \text{Sistem : } & ax + by = c \\ & a'x + b'y = c' \end{aligned}$$

gibi genel şekele getirilir ve usulüne göre çözülür.

Örnek 1:  $x - \frac{2x+y}{4} = \frac{5}{4} - \frac{2y+x}{4} \dots\dots (1)$   
 $1 - \frac{2x-y}{4} = y - \frac{2y-x}{3} \dots\dots (2)$

sistemini çözünüz.

Cözümü :

(I) denklemi paydaları kurtarırlırsa :  $4x - 2x - y = 5 - 2y - x$   
 $3x + y = 5 \dots\dots (3)$

(II)  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$  :  $12 - 6x + 3y = 12y - 8y - 4x$   
 $10x + y = 12 \dots\dots (4)$

elde edilir. (4) ve (3) ile elde edilen,

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 10x + y = 12 \end{cases}$$

sistemi çözülürse,  $x = 1$   $y = 2$  kökleri bulunur.

Sorular :

1°)  $\frac{x}{5} - \frac{y}{10} = 2$   $\quad$  2°)  $3x + \frac{7y}{9} = 19$   
 $x + \frac{7y}{5} = -9$   $(x=5; y=-10)$

$x + \frac{7y}{9} = 19$   $(x=4; y=9)$

3°)  $5x + \frac{y}{5} = 23$   $\quad$  4°)  $9x - 17 = \frac{37y}{13}$   
 $5y - \frac{31x}{4} = 44$   $(x=4; y=15)$

$9x - 17 = \frac{37y}{13}$   $(x=6; y=13)$

5°)  $\frac{5x}{4} + \frac{3y}{2} = 9$   $\quad$  6°)  $\frac{5x}{8} - \frac{3y}{5} = -4$   
 $\frac{17y}{2} - \frac{3x}{4} = 4$   $(x=6; y=1)$

$\frac{5x}{8} - \frac{3y}{5} = -4$   $(x=8; y=15)$

7°)  $\frac{x}{7} + \frac{y}{9} = \frac{22}{21}$   $\quad$  8°)  $\frac{5x-y}{3} = 5$   
 $\frac{x}{8} - \frac{y}{12} = \frac{3}{8}$   $(x=5; y=3)$

$\frac{4x+3y}{4} = 2x - \frac{1}{4}$   $(x=4; y=5)$

9°)  $\frac{x}{3} + 3y = 7$   $\quad$  10°)  $2x + \frac{y-2}{5} = 21$   
 $\frac{4x-2}{5} = 3y - 4$   $(x=3; y=2)$

$4y + \frac{x-4}{6} = 29$   $(x=10; y=7)$

11°)  $\frac{3x}{19} + 5y = 13$   $\quad$  12°)  $\frac{7x}{6} + \frac{5y}{3} = 34$   
 $2x + \frac{4-7y}{2} = 33$   $(x=12; y=12)$

13°)  $\frac{x+y}{3} + \frac{y-x}{2} = 9$   $\quad$  14°)  $\frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5$   
 $\frac{x}{2} + \frac{x+y}{9} = 5$   $(x=6; y=12)$   $\quad$   $\frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10$   $(x=20; y=20)$

15°)  $\frac{x+y}{3} + x = 15$   $\quad$  16°)  $\frac{x-1}{8} + \frac{y-2}{5} = 2$   
 $\frac{x-y}{5} + y = 6$   $(x=10; y=5)$   $\quad$   $2x + \frac{2y-5}{3} = 21$   
 $\frac{7x}{4} + \frac{5y}{3} = 20$   $\quad$  18°)  $\frac{2x+3y}{5} = 10 - \frac{y}{3}$   
 $\frac{3x}{5} + \frac{7y}{4} = 3x - 7$   $(x=9; y=4)$   $\quad$   $\frac{4y-3x}{6} = \frac{3x}{4} + 1$

19°)  $\frac{1-3x}{7} + \frac{3y-1}{5} = 2$   $\quad$  20°)  $\frac{5x-6y}{13} - 8 = 4y - 3x$   
 $\frac{3x+y}{11} + y = 9$   $(x=5; y=7)$   $\quad$   $\frac{9}{2} + \frac{x-y}{6} = 2y + \frac{3x-4y}{7}$   
 $\frac{x-6y}{2} = \frac{x-2y}{7} + 4$   $\quad$  22°)  $\frac{x+y}{5} - (x-y) = \frac{26}{5}$   
 $\frac{x+y}{2} = \frac{7x-5y}{6} + \frac{x+4}{4}$   $\quad$   $\frac{3x}{2} - 3(x+y) = 14 \left(1 - \frac{x}{4}\right) + 4x - 3$

23°)  $\frac{2x}{3} = \frac{5y-7}{12} + \frac{3}{4}$   $\quad$  (C :  $x = \frac{1}{8}; y = -\frac{1}{5}$ )  
 $\frac{3(x-1)}{7} + \frac{2y-x+16}{21} - \frac{1}{3} = \frac{y}{7}$

24°)  $\frac{4x-3y-7}{5} = \frac{3x}{10} - \frac{2y+41}{15}$   
 $\frac{y-1}{3} + \frac{x}{2} - \frac{2y}{30} = \frac{y-11}{15} + \frac{5x+44}{30}$

25°)  $\frac{x-1}{5} - \frac{9-x}{3} = \frac{y-11}{4}$   $(x=6; y=11)$   
 $\frac{2y+2}{3} - \frac{2x+y+1}{8} = \frac{x+14}{4}$

26°)  $\frac{6+x}{5} - \frac{2x-y-3}{4} = 3y-2$   $(x=4; y=1)$   
 $\frac{5y-2}{2} + \frac{4x-7}{6} = 23-5x$

### 3 — Harfli denklem sistemleri :

Harfli denklemeleri çözerken :

Denklemler basit şekele getirilir. Çözümde; her iki tarafı harfli bir ifade ile çarpar veya bölerken bu ifadenin sıfırdan farklı olması şartı koşulmalıdır. Diğer işlemler önce görüldüğü gibidir.

Örnek 1 :

$$\frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{x+y}{a} + \frac{x-y}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab} \quad \dots \dots (2)$$

sistemini çözünüz.

**Çözümü :**  $a \neq 0, b \neq 0$  olsunlar.

Denklemlerin her iki taraflarını  $a \cdot b$  ile çarpalım.

$$a(x-a) + b(y-b) = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$b(x+y) + a(x-y) = a^2 + b^2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

sistemi elde edilir. Bunu da,

$$ax+by=a^2+b^2 \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$(a+b)x-(a-b)y=a^2+b^2 \quad \dots \dots \dots (6)$$

şeklinde yazırız. (5) den

$$x = \frac{a^2 + b^2 - by}{a} \quad \dots \dots \dots (7)$$

bulunur.  $x$  in bu değeri (6) da yerine konursa,

$$(a+b)\frac{a^2 + b^2 - by}{a} - (a-b)y = a^2 + b^2$$

olur. Kısaltılırsa,

$$(a^2 + b^2)y = b(a^2 + b^2)$$

elde edilir.  $a^2 + b^2 \neq 0$  olduğundan,

$$y = b \quad \text{bulunur.}$$

$y$  nin bulunan değeri (7) de yerine konarak;

$$x = \frac{a^2 + b^2 - b^2}{a}$$

$$x = a \quad \text{elde edilir.}$$

### Sorular :

Aşağıdaki karflı denklem sistemlerini çözünüz.

$$1^{\circ}) ax+by$$

$$bx+ay=c$$

$$2^{\circ}) x+y=a+b$$

$$bx+ay=2ab$$

$$3^{\circ}) ax+by=a^2$$

$$bx+ay=b^2$$

$$4^{\circ}) \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$bx+ay=4ab$$

$$5^{\circ}) \frac{3x}{a} + \frac{2y}{b} = 3$$

$$\frac{9x}{a} - \frac{6y}{b} = 3$$

$$6^{\circ}) \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{a}{b}$$

$$7^{\circ}) (a+b)x+(a-b)y=2ab$$

$$(a+b)x+(a-b)y=2ax$$

$$(x=a, y=-a)$$

$$8^{\circ}) x+y=c$$

$$ax-by=c(a-b)$$

$$\left( x = \frac{ac}{a-b}, y = \frac{bc}{a+b} \right)$$

$$9^{\circ}) 3abx+y=9b$$

$$4ab+3y=17b$$

$$\left( x = \frac{2}{a}, y = 3b \right)$$

$$10^{\circ}) a(x+y)+b(x-y)=1$$

$$a(x-y)+b(x+y)=1$$

$$\left( x = \frac{1}{a+b}, y=0 \right)$$

$$11^{\circ}) (a+b)x-(a-b)y=4ab$$

$$(a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$$

$$(x=a+b, y=a-b)$$

$$12^{\circ}) \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0$$

$$(x=a, y=b)$$

$$\frac{x+y-b}{a} + \frac{x-y-a}{b} = 0$$

$$13^{\circ}) \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a$$

$$\left[ (x=(a+b)^2, y=(a-b)^2) \right]$$

$$\frac{x-y}{2ab} = \frac{x+y}{a^2+b^2}$$

$$14^{\circ}) (a^2+b^2)x-a^2y=b^2(a^2-b^2)$$

$$(a^2-b^2)x+b^2y=a^2(a^2-b^2)$$

$$(x=a^2-b^2, y=a^2-b^2)$$

$$15^{\circ}) (a+b)x=(a-b)(y+1)$$

$$\left( x = \frac{a}{a+b}, y = \frac{b}{a-b} \right)$$

$$(a^2-b^2)(x+y)=a^2+b^2$$

$$16^{\circ}) (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2)$$

$$(x=a+b, y=a-b)$$

$$ax-by=a^2+b^2$$

$$17^{\circ}) bx+cy=a+b$$

$$\left( x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c} \right)$$

$$ax\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}\right) + cy\left(\frac{1}{b-a} - \frac{1}{b+a}\right) = \frac{2a}{a+b}$$

$$18^{\circ}) \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$$

$$\left( x = \frac{a}{a-b}, y = \frac{-b}{a+b} \right)$$

$$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$$

## 4 — Daha güç iki bilinmiyenli denklem sistemleri:

## Sorular:

Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

$$1^{\circ}) \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{2x}{3x+3y}$$

$$\left( x = \frac{65}{9} ; y = \frac{13}{9} \right)$$

$$\frac{x+1}{2y-3} + 8 = \frac{22}{6y-9}$$

$$2^{\circ}) \frac{x-2}{y-3} - \frac{x-2}{y-2} = \frac{4}{(y-3)(y-2)}$$

$$\left( x=6 ; y=\frac{7}{4} \right)$$

$$(x-2)^2 - (x-3)^2 = (y+1)^2 - (y-1)^2$$

$$3^{\circ}) \frac{13}{x+2y+3} = \frac{3}{5y-4x-6}$$

$$(x=7 ; y=8)$$

$$\frac{3}{6x-5y+4} = \frac{19}{3x+2y+1}$$

$$4^{\circ}) \frac{2x}{3} - \frac{5y}{12} - \frac{3x}{2} - \frac{y}{3} = -\frac{43}{21}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

$$(x=-6 ; y=3)$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{3}$$

$$5^{\circ}) \frac{3x-4y}{5-y} + x - \frac{3+4x}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(x=5 ; y=3)$$

$$\frac{4x+2y}{3x-2} - y - \frac{5y-7}{5} = \frac{3}{5}$$

$$6^{\circ}) 2x-y=3$$

$$(x=17 ; y=31)$$

$$\frac{2x-y}{12} = 1$$

$$\frac{x+1}{8} - 2$$

$$7^{\circ}) \frac{3x-y}{2} + \frac{2y-5}{3} = \frac{8x+y-1}{7x+2y-1} = -\frac{3}{10}$$

$$\left( x = \frac{1}{3} ; y = 1 \right)$$

$$8^{\circ}) \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = 2$$

$$\frac{5y}{x+y}$$

$$5y+x=10$$

$$\left( x = \frac{5}{2} ; y = \frac{3}{2} \right)$$

$$9^{\circ}) \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{3x-2y}{4}} = \frac{4}{\frac{x}{3} + \frac{2x-3y}{2}}$$

$$\frac{2}{\frac{x}{3} + \frac{y}{4}} = \frac{3}{\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + 2 \frac{3}{4}}$$

$$10^{\circ}) \frac{x+4}{3 \frac{1}{3}} + \frac{y-2}{3 \frac{1}{2}} = \frac{35}{12}$$

$$\frac{2x-1}{2 \frac{1}{2}} + \frac{3y+4}{1 \frac{1}{4}} = 17 \frac{1}{2}$$

$$11^{\circ}) \frac{1-3y}{x+\frac{2-3x}{3}} = x+13$$

$$\frac{10y+1}{5} = y - \frac{2x-3}{x+3 - \frac{1+2x}{2}}$$

$$12^{\circ}) \frac{x}{x+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{4ab}{b^2-a^2}$$

$$\frac{x+y}{a+b} - \frac{x-y}{a-b} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$13^{\circ}) \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) = 1$$

$$(x=a+b ; y=a-b)$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{y - \frac{a}{x}}} = \frac{1}{x - \frac{1}{y - \frac{b}{x}}}$$

$$(x = \frac{a+b+2}{2} ; y = \frac{a+b}{a+b+2})$$

C — Birinci dereceden üç bilinmiyenli (ve daha fazla bilinmiyanlı) denklem sistemlerinin çözümü:

Birinci dercede çok bilinmiyenli denklem sistemlerinin çözümü de, iki bilinmiyenli sistemin çözümü gibi yapılır. Yalnız bilinmiyenlerin sayısı kadar birbirinden farklı birinci derece denkleminin verilmesi lâzımdır.

Genel olarak aşağıdaki çözüm yolunu kullanılır:

Verilen denklemlerin birinden, bilinmiyenlerden biri diğerleri içinde çözülür ve bu bilinmiyenin değeri diğer denklemelerin hepsinde yerine konur. Bu şekilde sistem, bir eksik bilinmiyenli yeni bir sisteme çevrilmiş olur. Bu işlemde bilinmiyenlerin sayısı ikiye ininceye kadar devam edilir.

Bulunan iki bilinmiyenli sistem, önce görüldüğü şekilde çözülür. Bulunan değerler aşağıdan yukarıya yerlerine konularak diğer bilinmeyenler bulunur.

Aşağıdaki örnekleri ve farklı çözüm yollarını inceleyiniz.

Örnek 1 :  $2x - 2y + 3z = 6 \dots\dots(1)$   
 $6x + 2y - 5z = -6 \dots\dots(2)$   
 $3x + 5y + z = 3 \dots\dots(3)$

Denklem sistemini çözünüz.

Çözümü : (Yerine koyma metodu ile) :

(3) den  $z = 3 - 3x - 5y \dots\dots(4)$

bulunur.  $z$  nin bu değeri (1) ve (2) de yerine konur.

$$\begin{aligned} 2x - 2y + 3(3 - 3x - 5y) &= 8 \\ 6x + 2y - 5(3 - 3x - 5y) &= -6 \end{aligned}$$

Denklemleri bulunur. Kısıtlırsa :

$$\begin{aligned} -7x - 17y &= -1 \dots\dots(5) \\ 21x + 27y &= 9 \dots\dots(6) \end{aligned}$$

gibi iki bilinmiyenli sistemi elde edilir.

(6) denklemi 3 e bölündür (5) den çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} 8y &= -2 \\ y &= -\frac{1}{4} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu değer, (5) de yerine konursa,  $x = \frac{3}{4}$  olur.

$x$  ve  $y$  nin bulunan bu değerleri (4) de yerine konursa,

$$\begin{aligned} z &= 3 - \frac{9}{4} + \frac{5}{4} \\ z &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Örnek 2 :  $3x + 4y - 5z = 32 \dots\dots(1)$   
 $4x - 5y + 3z = 18 \dots\dots(2)$   
 $5x - 3y - 4z = 2 \dots\dots(3)$

sistemini çözüüz;

Çözümü : (Yok etme metodu ile) :

Her üç denklemden  $z$  i yok edelim. (1) i 3 le (2) yi (5) le çarparım:

$$\begin{aligned} 9x + 12y - 15z &= 96 \dots\dots(4) \\ 20x - 25y + 15z &= 90 \dots\dots(5) \end{aligned}$$

(4) ve (5) toplanırsa,  $29x - 13y = 186 \dots\dots(6)$

bulunur. (2) yi 4 ile (3) ü 3 le çarparım:

$$16x - 20y + 12z = 72 \dots\dots(7)$$

$$15x - 9y - 12z = 6 \dots\dots(8)$$

$$\underline{31x - 29y = 79} \dots\dots(9)$$

(7) ile (8) toplanırsa, elde edilir. (6) ve (9) denklemfəriyle elde edilen,

$$29x - 13y = 186 \dots\dots(6)$$

$$31x - 29y = 78 \dots\dots(9)$$

sistemi çözüürse:  $x = 10$ ,  $y = 8$  bulunur. Bu değerler (1) de yerine konursa,

$$30 + 32 - 5z = 32$$

$z = 6$  bulunur.

Örnek 3 :  $ax + by + cz = d \dots\dots(1)$

$$a'x + b'y + c'z = d' \dots\dots(2)$$

$$a''x + b''y + c''z = d'' \dots\dots(3)$$

Şekilde genel olarak verilen sistemi çözünüz.

Çözümü : Önce (1) i  $c'$  ile (2) yi  $c$  ile çarpıp sonuçları taraf tarafa çıkarırsanız  $z$  yok edilir.

Sonra, (2) i  $c'$  ile (3) ü  $c'$  ile çarpıp sonuçları taraf tarafa çıkarırsanız yine  $z$  siz bir denklem bulunursunuz. Elde edeceğiniz bu iki denklemi çözerseniz  $x$ ,  $y$  değerlerini bulursunuz. Bu  $x$ ,  $y$  değerlerini verilen üç denklemden herhangi birine koyarak  $z$  yi buluruz.

Genel olarak  $x$ ,  $y$ ,  $z$  değerleri;

$$x = \frac{d(b'c'' - c'b'') - d'(bc'' - cb'') + d''(bc' - cb')}{a(b'c'' - c'b'') - a'(bc'' - cb'') + a''(bc' - cb')}$$

$$y = \frac{d(a'b'' - b'a'') - d'(ab'' - ba'') + d''(ab' - ba')}{c(a'b'' - b'a'') - c'(ab'' - ba'') + c''(ab' - ba')}$$

$$z = \frac{-d(a'c'' - c'a'') + d'(ac'' - ca'') - d(ac' - ca')}{-b(a'c'' - c'a'') + b'(ac'' - ca'') - b''(ac' - ca')}$$

şeklinde olur.

### Sorular :

Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

1º)  $x+2y+2z=11$        $x=1$       2º)  $x+3y+4z=14$        $x=-2$

$3x+4y+z=14$        $y=2$        $2x+y+2z=2$        $y=4$

$2x+y+z=7$        $z=3$        $x+2y+z=7$        $z=1$

3º)	$\begin{array}{l} 2x+2y+z=11 \\ x+4y+3z=17 \\ 3x+3y+z=16 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}$	4º)	$\begin{array}{l} 2x+3y-z=5 \\ 3x-2y+z=2 \\ x+y+z=6 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$
5º)	$\begin{array}{l} x+2y+z=9 \\ x+y+2z=3 \\ 2x+y+z=16 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=9 \\ y=2 \\ z=-4 \end{array}$	6º)	$\begin{array}{l} x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+z=1 \\ 3x-y+2z=9 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}$
7º)	$\begin{array}{l} 6x+2y-5z=13 \\ 3x+3y-2z=13 \\ 7x+5y-3z=26 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}$	8º)	$\begin{array}{l} x-2y+4z=26 \\ 5x+4y-6z=2 \\ 6x-3y-2z=5 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=4 \\ y=3 \\ z=5 \end{array}$
9º)	$\begin{array}{l} 3x+7y+10z+68=0 \\ 11x-6y+2z+64=0 \\ 5x+y-8z-66=0 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=-2 \\ y=4 \\ z=-9 \end{array}$	10º)	$\begin{array}{l} 3x+5y=34+3z \\ 4x+z=3+7y \\ 2x+3y-2z=22 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \\ z=-3 \end{array}$
11º)	$\begin{array}{l} x+y=12 \\ x+z=14 \\ y+z=16 \end{array}$	$\begin{array}{l} y=5 \\ y=7 \\ z=9 \end{array}$	12º)	$\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 2z-y=1 \\ 7x-9z=3 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=\frac{5}{6} \end{array}$
13º)	$\begin{array}{l} 5x+2y=14 \\ y-6z=-15 \\ x+2y+z=0 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=4 \\ y=-3 \\ z=2 \end{array}$	14º)	$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$	$x=22$
				$x+y+z=110$	$z=33$
					$z=55$
15º)	$\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \\ 5x-3y+z=6 \end{array}$			$\begin{array}{l} x=5 \\ y=15 \\ z=21 \end{array}$	
16º)	$\begin{array}{l} x+2y-3z+4u=31 \\ 3x+3y-4z-u=8 \\ 2x-u-5z+3u=13 \\ 2x+2u-z+u=17 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \\ z=1 \\ u=6 \end{array}$	17º)	$\begin{array}{l} 3x-y+2z-u=6 \\ 2x+3y-z+2u=14 \\ 5x+4y-3z+u=6 \\ 4x+2y-2z+3u=12 \end{array}$	$\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ z=5 \\ u=4 \end{array}$

D-iki ve daha fazla bilinmeyenli denklem yardımı ile çözülebilen problemler.

**Örnek 1:** İki sayı var, bunların toplamının dörtte biri ile farklarının yarısı toplamı 3 ediyor. Yine bu sayılarından birincisinin 12 katından ikincisinin 7 katı ekrinca 39 kalmıyor. Bu sayıları bulunuz.

Cözümü : Sayıları  $x$ ,  $y$  ile gösterelim.

$$\text{Birinci denklem: } \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2} = 3$$

olur. Bu sistem çözülürse:

$x = 5$  ,  $y = 3$  bulunur.

**Örnek 2:** Bir kesrin payına 2 eklenirse değeri  $\frac{2}{3}$  paydasına 4 eklenirse değeri  $\frac{4}{7}$  oluyor. Bu kesri bulunuz

**Çözümü :** Kesri,  $\frac{x}{y}$  ile gösterelim :

$$\text{Birinci denklem: } \frac{x+2}{y} = \frac{2}{3}$$

$$\text{İkinci} \Rightarrow : \frac{x}{y+4} = \frac{4}{7}$$

olur. Bu sistem çözülürse

$$x = 28 \quad ; \quad y = 45$$

bulunur ve istenen kesir  $\frac{28}{45}$  olur.

**Örnek 3:** İki basamaklı bir sayı var. Bu sayı rakamlarının mutlak değerleri toplamının 5 katıdır. Eğer bu sayıya 9 eklenirse, sayının ters yazılışı elde ediliyor. Bu sayıyı bulunuz.

Çözümü : O. basamağı B. basamağı

Rakamların mutlak değerleri toplamının 5 katı

$$\text{Birinci denklem : } \quad 5(x+y) = 10x + y$$

$$\text{ilkinci} \rightarrow 10x + y + 9 = 10y + x$$

olur. Bu sistem çözülürse;

$$x = 4 \quad ; \quad y = 5$$

bulunur. İstenen sayı 45 olur.

**Örnek 4:** Koray ve Gülay yaşlarını karşılaştırıyorlar. 3 yıl önce Koray'ın yaşı Gülay'ın yaşının 3 katı olduğu halde, 5 yıl sonra Koray'ın yaş Gülay'ın yaşının  $\frac{7}{3}$ . sine eşit oluyor. Yaşları bulunuz;

Çözümü : Koray'ın yaşı Gülay'ın yaşı

Birinci denklem

$$x - 3 = 3(y - 3)$$

İkinci

$$x + 5 = \frac{7}{3}(y + 5)$$

olur. sistem çözülürse :

$$\text{Koray'ın yaşı} \quad x = 51$$

$$\text{Gülay'ın yaşı} \quad y = 19 \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek 5:** Bir adam parasını iki parçaya ayırarak birincisini  $\% 3$  den diğerini  $\% 2,5$  den faize veriliyor ve yıl sonunda 4900 lira faiz alıyor. Eğer birincisini  $\% 2,5$  dan ikincisini  $\% 3$  den fazla vermiş olsaydı, 100 lira fazla faiz almış olacaktı. Adamın parasını ve faiz verilen parçaları bulunuz.

**Çözümü:** Paranın birinci parçasını  $x$ , ikinci parçasını  $y$  ile gösterelim :

$$\text{Birinci denklem : } \frac{x \cdot 3 \cdot 1}{100} + \frac{y \cdot 2,5 \cdot 1}{100} = 4900$$

$$\text{İkinci denklem : } \frac{x \cdot 2,5 \cdot 1}{100} + \frac{y \cdot 3 \cdot 1}{100} = 4900 + 100$$

olur. Sistem çözülürse :

$$x = 80000, \quad y = 100000$$

bulunur. Adamın parası  $x + y = 180000$  lira olur.

**Örnek 6:** 27 km uzaklıktaki A, B gibi iki yerden iki yolcu aynı zamanda hareket ediyorlar. Buolar karşı karşıya hareket etselerdi 3 saat sonra arkaya arkaya hareket etselerdi 9 saat sonra kavuşacaklardı. Yolcuların hızlarını bulunuz.

**Çözümü:** A dan hareket edenin hızı ( $x$ ), diğerinin hızı ( $y$ ) olsun.



Karşı karşıya hareketlerinde gittikleri yollar toplamı 27 edeceğinden :

$$\text{Birinci denklem : } 3x + 3y = 27 \dots \dots \dots (1)$$

Arka arkaya hareketlerinde gittikleri yollar farkı 27 edeceğinden :

$$\text{İkinci denklem : } 9x - 9y = 27 \dots \dots \dots (2)$$

edecektir. (Burada  $x > y$  farzedilmiştir). (1) ve (2) denklemlerinin çözümünden,

$$x = 6, \quad y = 3 \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek 7:** İki cins ispirtadan birincisinin 30 litresiyle ikincisinin 40 litresi karıştırılırsa  $\% 44 \frac{2}{7}$  oranında ; birincinin 10 litresiyle ikincisinin

60 litresi karıştırılırsa  $\% 41 \frac{3}{7}$  oranında bir karışım elde ediliyor. Her iki ispirtonun ispirto oranını hesaplayınız.

**Çözümü :** İspirto oranlarını sırasıyla  $\frac{x}{100}$  ve  $\frac{y}{100}$  ile gösterelim :

$$\text{Birinci denklem : } \frac{x}{100} \cdot 30 + \frac{y}{100} \cdot 40 = \frac{44 \frac{2}{7}}{100} (30+40)$$

$$\text{İkinci } " : \frac{x}{100} \cdot 10 + \frac{y}{100} \cdot 60 = \frac{41 \frac{3}{7}}{100} (10+60)$$

olur. Sistem çözülürse ;

$$x = 50, \quad y = 40$$

bulunur. İspirto oranları  $\% 50$ ,  $\% 40$  olarak bulunur.

**Örnek 8:** Bir dik dörtgenin çevresi 200 m dir. Bu dik dörtgenin tabanı 3 m, yüksekliği 2 m çoğaltılsa alanı 246 m<sup>2</sup> artmaktadır. Kenarları bulunuz.

**Çözümü :** Kenarları  $x$ ,  $y$  ile gösterelim :

$$\text{Birinci denklem : } 2x + 2y = 200$$

$$\text{İkinci } " : (x+3)(y+2) = xy + 246$$

bulunur. Sistem çözülürse ;

$$x = 60, \quad y = 40 \quad \text{bulunur.}$$

**Örnek 9:** Ali, Basri ve Cemil yaşlarından konuşuyorlardı. Ali, Basri'ye şöyle diyor : (Ben senin yaşında iken Cemil 10 yaşındaydı). Basri şu şekilde cevap veriyor : (Ben senin yaşına geldiğim zaman Cemil 26 yaşına gelmiş olacak). Cemil şunu ilave ediyor : (ben doğduğum zaman sizin yaşlarınızın toplamı şimdiki yaşımlın iki katı idi). Yaşları bulunuz.

**Çözümü :**  $\frac{\text{Ali'nin yaşı}}{x}$ ,  $\frac{\text{Basri'nin yaşı}}{y}$ ,  $\frac{\text{Cemil'in yaşı}}{z}$  olsun

Birinci denklem :

Ali,  $x-y$  yıl önce Basri'nin yaşında idi, o zaman Cemil'in yaşı  $z-(x-y)$  idi. Şuhalde,

$$z-(x-y)=10 \dots \dots \dots (1)$$

İkinci denklem :

Basri  $x-y$  yıl önce Alının yaşında olacak ve o zaman Cemil'in yaşı :

$$z+(x-y)=26 \dots \dots \dots (2)$$

$z+(x-y)$  olacak. Şuhalde,

Üçüncü denklem :

Cemil  $z$  yıl önce doğmuştur. O zaman Ali  $x-z$  ve Basri  $y-z$  yaşında idi. Şuhalde,

$$x-z+y-z=27 \dots \dots \dots (3)$$

Bu üç denklemle elde edilen sistem çözülürse

$$x = 40 ; y = 32 ; z = 18$$

bulunur.

**Örnek 10 :** Üç basamaklı bir sayı var. Yüzler basamağındaki rakamlar birler basamağındaki rakamın  $\frac{3}{5}$  i dir. Onlar basamağındaki rakam dört iki basamaktaki rakamlar toplamının yarısıdır. Bu sayıya 198 eklenirse sayının ters yazılışı elde ediliyor. Sayıyı bulunuz.

**Cözümü :**  $\frac{\text{Y. basamağı}}{x} \quad \frac{\text{O. basamağı}}{y} \quad \frac{\text{B. basamağı}}{z}$  olsun.

Birinci denklem:  $x = \frac{3}{5} z$

İkinci denklem:  $y = \frac{1}{2} (x + z)$

Üçüncü denklem:  $100x + 10y + z + 198 = 100z + 10y + x$  olur. Bu üç denklemle meydana gelen sistem çözülürse:

$$x = 3 ; y = 4 ; z = 5$$

bulunur. İstenen sayı 345 olur.

### Problemler:

1) Öyle iki sayı bulunuz ki; birinci ile ikincinin yarısı toplamı 20, ikinci ile birincinin üçe biri toplamı 20 ediyor sayıları bulunuz. (12 ; 16)

2) Öyle iki sayı bulunuz ki; birincinin yarısı ile ikincinin üçe biri toplamı 32 etsin. Yine birincinin dörtte biri ile ikinci beşte biri toplamı 18 etsin (24 ; 60)

3) Bir grup işçi kazandıkları paraları arasında paylaşacaklar. Eğer 6 işçi daha olsaydı her biri ikişer lira eksik olacaktı ve eğer üç işçi noksan olsalardı her birine iki lira fazla para düşecekti. İşçi sayısını ve her birinin aldığı parayı bulunuz. (12 işçi ve her işçi 6 şar lira alıyor)

4) Güner'in parası 36 lira fazlalığında Koray'ın parasının üç katı oluyor. Koray'ın parası 5 lira olursa Güner'in parasının yarısı oluyor. Güner'in ve Koray'ın parasını bulunuz. (42 ; 36)

5) 7 yıl önce Köray Gülay'ın üç katı yaşında idi. Bundan 7 yıl sonra Köray'ın yaşı Gülay'ın yaşıının iki katı olacak. Yaşları bulunuz. (49 ; 21)

6) Lâmi Sevgiye 25 lira verirse her ikisinin paraları eşit olacak, eğer Sevgi Lâmi'ye 22 lira verirse Lâmi'nin parası Sevgi'nin parasının üç katı olacak, her birinin parasını bulunuz. (166 ; 116)

7) Bir kesrin payına (1) eklenir, paydasından (1) çıkarılırsa kesrin değeri bir oluyor. Eğer payı paydasın kadar arttırırsın ve paydası payı kadar eksiltirilirse kesrin değeri 4 oluyor. Kesri bulunuz.  $\left( \frac{4}{15} \right)$

8) Bir kesrin payı (1) fazlalığında değeri  $\frac{1}{3}$ , paydası (1) fazlalığında değeri  $\frac{1}{4}$  oluyor. Kesri bulunuz.  $\left( \frac{4}{15} \right)$

9) Lâtif, Hüseyin'e 5 lira verirse Hüseyin'in parası Lâtif'in parasının  $\frac{3}{10}$  ü kaçıracak, eğer Hüseyin, Lâtif'e 6 lira verirse Hüseyin'in parası Lâtif'in parasının  $\frac{2}{5}$  si olacak. Her birinin parasını bulunuz. (12,5 ; 10,25)

10) İki rakamlı bir sayı, rakamları toplamının 4 katına eşittir. Bu sayıya 15 eklenirse ters yazılışı elde edildiğine göre sayıyı bulunuz. (24)

11) İki rakamlı bir sayı ile ters yazılışı ile elde edilen sayının toplamı 110 ediyor. Yine sayının 1 fazlası, ters yazılışının 5 katı olduğuna göre sayıyı bulunuz. (91)

12) Ahmed'le Cemil birlikte çalışarak bir işi 30 günde bitiriyorlar. İşe başladıklarının 18inci günü akşamı Cemil hastalanıyor ve Ahmed kalan işi yalnız olarak 20 gün sonra bitiriyor. Bu işi her birinin yalnız olarak bitirecekleri günü hesaplayınız. (50 ; 75)

13) Ali, Bedri, Celâl bir işi beraberce 30 günde bitiriyorlar. Ali, Bedri beraber çalışıkları zaman bu işi 32 günde, Celâl ile Bedri birlikte çalışınca 120 günde bitiriyorlar. Her birinin yalnız başına bu işi kaç günde bitirebileceklerini bulunuz. (40 ; 160 ; 480)

14) A ile B birlikte çalışarak 5 günde 54 lira, A ile C birlikte çalışarak 9 günde 54 lira ve B ile C beraber çalışarak 15 günde 80 lira kazanıyorlar. Her birinin günde kazanabileceği parayı bulunuz.

## BİRİNCİ DERECEDE EŞİTSİZLİKLER

**1 — Tarif:** Farkları sıfır olmayan  $a, b$  gibi iki cebir sayısını düşünelim.

- 1°.  $a - b$  farkı pozitif ise  $a, b$  den daha büyük olur ve  $a > b$  şeklinde yazılır.
- 2°.  $a - b$  farkı negatif ise  $a, b$  den daha küçük olur ve  $a < b$  şeklinde yazılır.

Yukarıdaki tariften aşağıdaki neticeleri çıkarabiliriz :

a) İki pozitif sayıdan mutlak değeri büyük olanı diğerinden daha büyüktür.

$$+5 > +2; \quad +7 > +\frac{1}{3}$$

b) İki negatif sayıdan mutlak değeri büyük olanı diğerinden daha küçüktür.

$$-2 > -5; \quad -\frac{3}{2} > -7$$

c) Bütün pozitif sayılar sıfırdan büyük, bütün negatif sayılar sıfırdan küçüktür.

$$+7 > 0, \quad +\frac{1}{5} > 0; \quad -4 < 0, \quad -\frac{3}{4} < 0$$

**Not:**  $a > 0$  ise  $a$  pozitif olur;  $a < 0$  ise  $a$  negatif olur.

d) Bütün pozitif sayılar bütün negatif sayılardan büyüktür :

$$+0 > -12; \quad +\frac{3}{16} > -4$$

**Örnek :**

$$+4; \quad -\frac{1}{3}; \quad +5; \quad -6; \quad -12; \quad +\frac{3}{2}; \quad 0; \quad -1$$

sayılarını büyülük sırasına göre yazınız :

$$-12 < -6 < -1 < -\frac{1}{3} < 0 < \frac{3}{2} < +4 < +5$$

**Not:** Eşitlik ve eşitsizlik bağıntılarının aşağıdaki özelliklerine dikkat ediniz.

$$a = b$$

Eşitlik

$$a \leq b$$

Geniş anlamda

eşitsizlik

$$a < b$$

Kesin anlamda

eşitsizlik

$a = b$  ..... eşitlik anlamına gelir. ( $a, b$ 'ye eşittir.)

$a \leq b$  ..... geniş anlamda eşitsizlik, ( $a, b$ 'den büyük ve eşit olabilir.)

$a < b$  ..... kesin anlamda eşitsizlik, ( $a$ , daima  $b$ 'den büyüktür.)

**2 — Eşitsizliklere ait bilgiler :**

a)  $a, b, c$  gibi üç sayıdan :

$$a > b \text{ ve } b > c \text{ ise } a > c \text{ olur.}$$

Haklıkaten,  $a > b$  ise  $a - b$  pozitif,

$$b > c \text{ ise } b - c > 0 \text{ demektir.}$$

$$(a - b) + (b - c) = a - c \text{ olur.}$$

Burada  $a - c$  nin de pozitif olduğu görülür. Bu da :  
 $a > c$  demek olur.

**Örnek :**  $+4 > +3, \quad +3 > -2$  ise  $+4 > -2$  olur.

b) Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenirse (veya çıkarılırsa) eşitsizlik bozulmaz.

$$a > b \text{ ise } a + c > b + c \text{ olur.}$$

$$a + c - (b + c) = a + c - b - c = a - b$$

Hipotezeze göre  $a - b$  pozitif olduğundan  $a + c - (b + c)$  de pozitif olacaktır. Şu halde :

$$a + c > b + c \text{ olur.}$$

**Örnek :** 1.  $+4 > -2$  her iki tarafına 6 ekliyelim :

$$+4 + 6 > -2 + 6, \quad +10 > +4 \text{ olur.}$$

2.  $-3 < -1$  her iki tarafına 2 ekliyelim :

$$-3 + 2 < -1 + 2, \quad -1 < +1 \text{ dir.}$$

c) Aynı yönlü eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir

$$a > b, \quad c > d \text{ ise, } a + c > b + d \text{ olur.}$$

$a - b$  ve  $c - d$  pozitif olacaklarından toplamları da pozitif olur.

$$(a - b) + (c - d) = a - b + c - d$$

$$= a + c - b - d$$

$= (a + c) - (b + d)$  de pozitif olur. Bu da bize :

$a + c > b + d$  olduğunu gösterir.

**Örnek :** 1.  $+4 > -2$

$$+ -1 > -6 \text{ ise}$$

$$+4 - 1 > -2 - 6 \rightarrow +3 > -8 \text{ olur.}$$

2.  $+4 > -2$

$$\begin{array}{r} +2 > 1 \\ +4 > -2 \\ \hline 6 > -1 \end{array}$$

**SORULAR:**

- 1 — Aynı yönlü iki eşitsizliğin farkı için ne söyleyebiliriz?
- 2 — Aynı yönlü ikiden fazla eşitsizliklerin toplamı için ne söyleyebilirsiniz?
- d) Bir eşitsizliğin iki tarafı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılırsa (veya bölündürse):
  1. Sayı pozitifse eşitsizliğin yönü değişmez.
  2. Sayı negatifse » » » » deşisir.

$$a > b \text{ ise } \begin{cases} 1. m > 0 \text{ ise } ma > mb \\ 2. m < 0 \text{ ise } ma < mb \text{ olur.} \end{cases}$$

a > b olduğundan a - b pozitif olur.  
 m ile çarparıksak, m(a - b) = ma - mb  
 ma - mb farkı m > 0 ise negatif olur.  
 ma - mb > m < 0 ise negatif olur.

**SORU:**

Eşitsizliğin her iki tarafı m sayısı ile bölündüğü halde ne söyleyebilirsiniz?

**Örnek:**  $-4 > -6$

Her iki tarafı +3 ile çarparıksak:  $-12 > -18$   
 » » » -3 » » :  $+12 < +18$   
 » » » +2 » bölersek :  $-2 > -3$   
 » » » -2 » » :  $+2 < +3$  olur.

**Netice:** Bir eşitsizliğin her iki tarafının işaretini değiştirilirse bu eşitsizliğin yönü deşisir.

Çünkü, her iki taraf (-1) ile çarpılmış olur.

e) Bir eşitsizliğin karesi alınırsa :

- 1°. Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif ise yön deşismez,
- 2°. Eşitsizliğin her iki tarafı negatif ise yön deşisir.

1°.  $a > b > 0$  ise d de dördüğümüz gibi:

$$a^2 > ab : ab > b^2 \text{ olur.}$$

(a) ya göre de:

$$a^2 > b^2 \text{ olur.}$$

2°.  $0 > a > b$  ise:  $a^2 < ab$ .  $a^2 < b^2$  olur.

**Not:**  $a > 0 > b$  ise  $a^2$ ,  $b^2$  için bir şey söyleyenemez.

**Örnek:** 1.  $4 > 2$  ise, her iki tarafın karesi alınırsa,  $16 > 4$  eder.  
 2.  $-3 < 2$  ise, her iki tarafın karesi alınırsa,  $9 > 4$  eder.

**3 — Bir bilinmiyenli eşitsizlikler:**

İçinde bir bilinmiyen bulunan eşitsizliklere bir bilinmiyenli eşitsizlikler denir.

Bir bilinmiyenli bir eşitsizliği çözerken:

1. Eşitsizliğin her iki tarafı paydadandan kurtarılır.
2. Çarpımlar yapıldıktan ve parantezler açıldıktan sonra bilinenler eşitsizliğin bir tarafına, bilinmiyenler diğer tarafına atılır.
3. Her iki tarafta toplama yapılarak bilinmiyenin kat sayısına bölünür.

Genel olarak  $ax + b > 0 \dots (1)$  dir.

**Cözümü:**  $ax > -b$

1.  $a > 0$  ise  $x > -\frac{b}{a}$

2.  $a < 0$  ise  $x < -\frac{b}{a}$  olur.

3.  $a = 0$  olursa b pozitif olmalıdır:

$a > 0$  ise, Tablosu:

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	-	0	++

$a < 0$  ise, Tablosu:

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	+	0	---

$$\text{Örnek: } 3. \quad 2x - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} > 3x - \frac{1}{3} + \frac{x}{6}$$

Her iki tarafı ortak payda olan 6 ile çarpalım :

$$12x - 2x + 3 > 18x - 2 + x$$

Bilinenleri bir tarafa, bilinmiyenleri diğer tarafa atalım :

$$12x - 2x - 18x - x > -3 - 2$$

Toplama yapalım :

$$-9x > -5$$

Her iki tarafı  $-9$  a bölelim,  $x < \frac{5}{9}$  olur.

Buradan, verilen eşitsizliğin  $x$  in  $\frac{5}{9}$  dan küçük değerleri için sağlanacağı anlaşıılır.

$$\text{Örnek: } 4. \quad (x - 5)(2x + 4) < 0$$

Her çarpanın işaret tabloları alt alta yazılır ve çarpının işaretini bulunur :

x	-2	5
$x - 5$	--   --- 0 +++	
$2x + 4$	-- 0 + ++   ++	
$(x - 5)(2x + 4)$	+ ! -   +	

Şu halde, eşitliğin çözümü  $-2 < x < 5$  olur.

$$\text{Örnek: } 5. \quad (2x + 1)(3x - 1)(-x + 5) > 0 \text{ eşitsizliğini çözünüz :}$$

**Cözümü:** Çarpanların kökleri :

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$3x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$-x + 5 = 0 \rightarrow x = 5$$

Her çarpanın işaret tablolarını alt alta yaparak netice işaretini buluruz.

x	-∞	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	5	$+\infty$
$2x + 1$	- 0 + + +				
$3x - 1$	- - 0 + +				
$-x + 5$	+ + + 0 -				
$(2x + 1)(3x - 1)(-x + 5)$	+ - + -				

Çarpanların işaretleri belli olunca çarpının işaretti de belli olur. Eşitsizliği sağlayan bölge tabloda belirtildiği gibi :

$$x < -\frac{1}{2} ; \quad \frac{1}{3} < x < 5 \text{ dir.}$$

$$\text{Örnek: } 6. \quad \frac{(x - 3)(7x + 5)}{2x - 4} < 0 \text{ eşitsizliğini çözünüz.}$$

**Cözümü:** Pay ve paydadaki her çarpanın kökleri :

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$7x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{7}$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

Her çarpanın işaretleri ayrı ayrı belirtilerek aşağıda gösterildiği gibi bir tabloda gösterilir :

x	$-\frac{5}{7}$	2	3
$x - 3$	- - - 0 +		
$7x + 5$	- 0 + + +		
$2x - 4$	- - 0 + +		
$(x - 3)(7x + 5)$	- + - -		
$2x - 4$	- + - -		

Her çarpanın işaretleri göz önünde tutularak netice, işaret, tablo da görüldüğü gibi, bulunur.

Eşitsizliği sağlayan bölge :

$$x < -\frac{5}{7}; \quad 2 < x < 3 \text{ dir.}$$

$\frac{(x-3)(7x+5)}{2x-4}$  ifadesinin işaretini arayacak yerde, eşitsizliğin her iki yanı pozitif olan  $(2x-4)^2$  ile çarpılarak elde olunan :

$$(x-3)(7x+5)(2x-4)$$

İfadesinden işaretini aranarak da bulunabilir.

Not : Verilen ifadelerin pay ve paydasındaki çarpanlar birinci dereceden değilse, birinci derece çarpanlara ayırmak suretiyle yukarıki örneklerde görüldüğü gibi yapılır :

$$\frac{(x^2-4)(x-5)}{x^2-4+3} < 0 \rightarrow \frac{(x-2)(x+2)(x-5)}{(x-3)(x-1)} < 0 \text{ gibi.}$$

### SORULAR :

Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz :

1.  $18x+5 > 17x+8$
2.  $7x+6 < 3x+5$
3.  $3x+5+7x > -35$
4.  $25x+18 > 10-8x$
5.  $7(x-2) < 3(x+5)$
6.  $6(x+8) > 7(5x-8)$
7.  $7(x-2) > 9(x+1)-5$
8.  $3(1-2x) < 6(x+1)-3$
9.  $8x+5(27-4x) > 19+8(x+12)$
10.  $10-5x+12(x-5) > 14x+30$   
 $< -5x-8$
11.  $9(13-x)-4x > 5(10-2x)+8x$
12.  $5x+2 - \frac{x}{2} > 3x+1$
13.  $\frac{2x-1}{7} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$
14.  $\frac{3x}{2} + 4 > \frac{x}{2} + 2$

$$15. \quad 2x - \frac{x+7}{10} - \frac{x-5}{5} > \frac{x-9}{3} \quad 20. \quad 2x-3)(x+5) < 0$$

$$16. \quad 2x - \frac{x-1}{2} < \frac{43}{2} \quad 21. \quad (x+1)(x+3)(x-5) \geq 3$$

$$17. \quad \frac{x-5}{4} - \frac{8+x}{3} < \frac{x+11}{6} \quad 22. \quad \frac{x-3}{x-2} < 0$$

$$18. \quad 15x - \frac{7x-4}{2} < 13x - \frac{5}{2} \quad 23. \quad \frac{(x+5)(x-2)}{x+7} > 0$$

$$19. \quad \frac{8x+4}{9} - \frac{x+4}{4} < \frac{2x+23}{6} \quad 24. \quad \frac{(x+5)(x-3)}{x^2-1} < 0$$

## BÖLÜM VIII

### Fonksiyonlar

#### A — Fonksiyon fikri:

$y = 3x + 2$  şeklinde bir bağılılık düşünelim. Burada  $x$ 'e meselâ 2 değerini verirsek  $y = 2 \cdot 3 + 2 = 8$  eder.  $x$  é değişik değerler verirsek,

$$\begin{array}{ll} y = 3x + 2 & \text{bağılılığında,} \\ x = 2 & \text{için } y = 3 \cdot 2 + 2 = 8 \\ x = 3 & \rightarrow y = 3 \cdot 3 + 2 = 11 \\ x = 4 & \rightarrow y = 3 \cdot 4 + 2 = 14 \end{array}$$

olur. Görülüyorki,  $x$  se verilen değişik değerlere karşılık  $y$  değeri değişmektedir, yani  $y$  nin alacağı değerler  $x$ 'e bağlıdır.

Bunada  $y$ ,  $x$  in bir fonksiyonudur denir.

Meselâ, bir çemberin çevesi yarıçapının bir fonksiyonudur.

Çünkü,  $r$  değişikçe; çevre de;  $2\pi \cdot r$  nin alacağı değerler çerçevede değişecektir.

Keyfi her değeri alabilen kümeyetlere değişken denir.

Şuhalde fonksiyonu daha étraflıca tarif edelim.

Bir  $x$  değişkeninin her değerine, bir  $y$  sayısının belli değerleri tekabül ediyorsa,  $y$  sayısı  $x$  in bir fonksiyonudur denir.

$$y = \frac{2x+3}{x-2}, \quad y = x^2 - 3x$$

eşitlikleri birer fonksiyondur.  $y$ ,  $x$  in bir fonksiyonu ise bu genel olarak

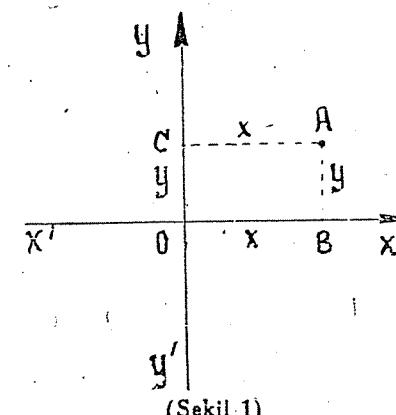
$$y = f(x)$$

şeklinde gösterilir.

#### B — Koordinat sistemi:

##### 1 — Bir noktanın koordinatları:

(Şekil: 1) de görüldüğü gibi düzleme içinde birbirine (O) noktasında dik olan  $xx'$  ve  $yy'$  doğrularını alalım ve bunlar üzerinde birer pozitif ve negatif yönü ve ölçü birimini seçelim. Düzleme içinde bir (A) noktasından  $xx'$  eksenine (AB),  $yy'$  eksenine de (AC) dik melerini indirelim.



$(ox)$ ' ve  $(oy)$  eksenleri üzerinde meydana gelen (OB, OC) doğru parçasının cebirsel değerlerine (A) noktasının koordinatları denir.

$\overline{OB} = x$  sayısına (A) noktasının apsisi.

$\overline{OC} = y$  sayısına (A) noktasının ordinatı denir.

$xx'$  eksenine apsis eksenini,  $yy'$  eksenine ordinat eksenini. (O) noktasına da başlangıç noktası (veya orijin) denir.

$\overline{OB} = \overline{CA}$  ve  $\overline{OC} = \overline{AB}$  olduğunu şekeiten görürüz.

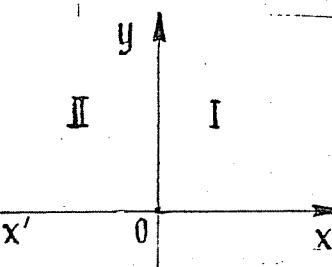
A noktası : A ( $x ; y$ ) şeklinde gösterilir.

Koordinatları ile verilen bir noktada apsis daima birinci, ordinat ikinci sayı olarak yazılır. Meselâ, M (4 ; 5) gibi verilen bir noktanın, birinci sayı olan 4 noktanın apsisi, ikincisi olan 5 ordinatını gösterir.

Netice olarak: Koordinat sisteminde bir (A) noktası verildiğine göre, bu noktadan apsis eksenine indirilen dikmenin dikme ayağının eksenlerin kesim noktasına (başlangıç noktası) olan cebirsel uzaklıBU noktanın apsisi; ordinat eksenine indirilen dikmenin dikme ayağının başlangıç noktasına olan cebirsel uzaklıBU ise bu noktanın ordinatını verir.

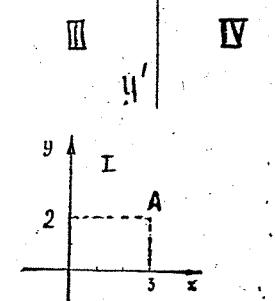
Karşıtlar olarak: Verilen iki cebir sayısına da düzleme içinde birn tekabül eder.

Aşağıdaki, düzleme alınan değişik noktalara ait koordinatları inceleyiniz:



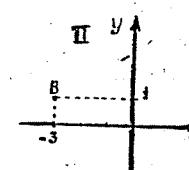
$$O(0 ; 0)$$

Başlangıç noktasının apsis ordinatı sıfırdır: O(0 ; 0).



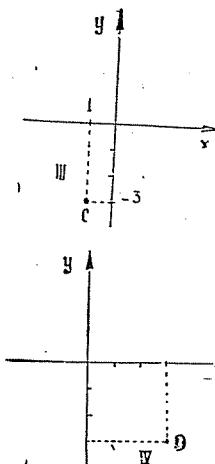
$$A(3 ; 2)$$

I nci bölgedeki noktaların koordinatları  $x > 0$ ,  $y > 0$  olur.



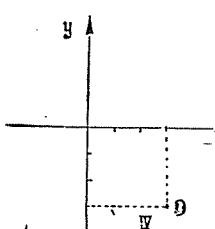
$$B(-3 ; 1)$$

II nci bölgedeki noktaların koordinatları  $x < 0$ ,  $y > 0$  olur.



$C(-1; -3)$

III ncü bölgedeki noktaların koordinatları  $x < 0$ ,  $y < 0$  olur.



$D(3; -3)$

IV ncü bölgedeki noktaların koordinatları  $x > 0$ ,  $y < 0$  olur.

## 2 — Koordinatı verilen bir noktayı yerleştirmek :

A (2; 3) gibi koordinatları ile verilen bir (A) noktasını, sececeğimiz bir koordinat sistemi üzerinde göstermek için :

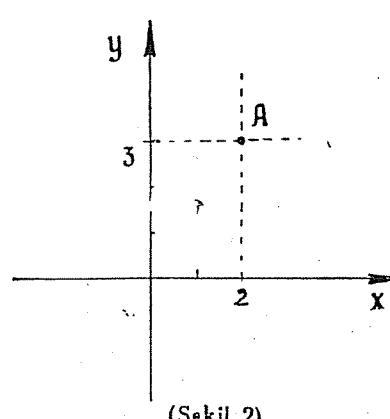
xx' eksenine 2 noktasından, yy' eksenine 3 noktasından dikler çizeriz. Bu diklerin kesim noktası (A) noktasının yerini verir. (Şekil: 2)

Not : Yukarıda tarif ettiğimiz koordinatlara **Kartezyen Koordinatlar** adı verilir.

## Analitik geometriye giriş :

Noktaları koordinat ekseni üzerinde gösterebildikten sonra geometri de gördüğümüz şekilleri bu sistem üzerinde incelemek mümkün olacaktır. İşte geometri şekillerini ve özelliklerini bu şekilde cebirsel işlem ve metodlarla inceleme analitik geometri bölümüne girer.

O halde analitik geometriyi, cebirin geometriye tatbikinden doğan bir matematik kolu olarak tanımlamak mümkündür. Cebirsel işlemler çoğu zaman geometrik görüşlerden daha kolaydır. Bu bakımdan birçok



(Şekil 2)



Françız filozof ve matematikcisi  
René Descartes (1596 — 1650)

geometri problemlerini analitik geometri metodları ile daha kolay çözmek mümkün olmaktadır. Hatta analitik geometri cebir ve geometrinin bir karışımı olması dolayısıyle bazan cebrin bir bölüm, bazan da geometrinin bir bölüm olarak karşımıza çıkar.

Analitik geometri esasları için kullanılan koordinat sistemini ilk defa 1619 da Dekart (Descartes) bulmuştur. Yukarıda esaslarını söyledigmiz sisteme; Dekart Koordinat sistemi de denir. Analitik geometri için metodları ve esasları sıra ile aşağıda göreceğiz.

## SORULAR :

1) Seceğiniz bir koordinat sistemi üzerinde, aşağıda apsis ve ordinatı (koordinatı) verilen noktaların yerlerini bulunuz.

- $A(5; 1), B(4; 2), C(2; 6), D(6; 6)$
- $A(-1; 2), B(-1; 1), C(-4; 5), D(-3; 6), E(-1; 5)$
- $A(-4; -2), B(-3; -6), C(-2; -5), D(-5; -4)$
- $A(2; -4), B(3; -5), C(5; -2), D(6; -6), E(1; 2)$
- $A(0; 2), B(0; 6), C(0; 4)$
- $A(0; -1), B(0; -6), C(0; -4)$
- $A(4; 0), B(6; 0), C(1; 0), D(5; 0)$
- $A(0; 3), B(-6; 0), C(-5; 0), D(-2; 0)$

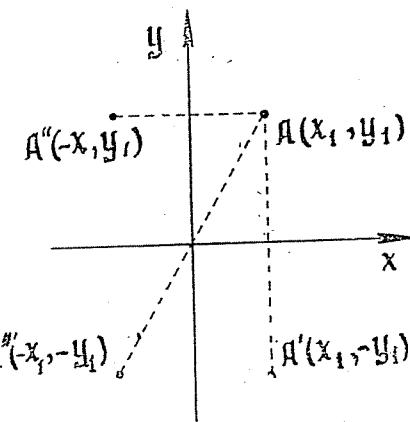
2) Herhangi bir koordinat sisteminde, bir  $A(x_1, y_1)$  noktası alınıyor.

a) A noktasının (x) eksenine göre simetriği olan  $A'$  noktasının,

b) A noktasının (y) eksenine göre simetriği olan  $A''$  noktasının

c) A noktasının (o) orijine göre simetriği olan  $A'''$  noktasının, koordinatlarını bulunuz.

(Şekil 3) ü inceleyiniz, ve  $A(3; 2)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(-3; 5)$  noktalarının (x) eksenine, (y) eksenine ve orijine göre simetrikleri olan noktaların koordinatlarını bulunuz.



(Şekil 3)

## 3 — İki nokta arasındaki uzaklık :

(Şekil 4) de görüldüğü gibi koordinat sistemi üzerinde  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  gibi iki nokta alalım.

A ve B noktalarından eksenlere indirilen dikmelerin dikme ayakları  $A'$ ,  $A''$  ve  $B'$ ,  $B''$  olsun.  $BB''$  nin uzantısı  $AA'$  yi C de kessin. ABC dik üçgeninde Pitagor bağıntısından dolayı :

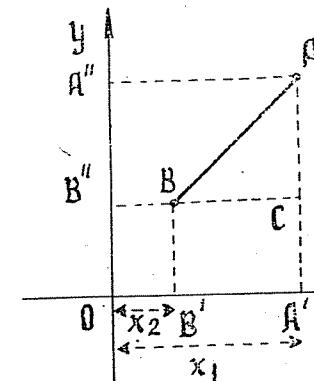
$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{A'C}^2$$

yazılabilir.

$$\overline{A'B'} = \overline{OA'} - \overline{OB'} = x_1 - x_2$$

$$\overline{A'C} = \overline{OA''} - \overline{OB''} = y_1 - y_2$$

olduğundan yerlerine konursa,



(Şekil 4)

$$\overline{AB}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

elde edilir.

**İki nokta arasındaki uzaklığın karesi:** bu noktalara ait apsisler farkının karesi ile ordinatlar farkının karesi toplamına eşittir.

**Özel hal:** A ( $x_1 ; y_1$ ) noktasıının (O) başlangıç noktasına olan uzaklığ için;

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0 \quad \text{olacağından,}$$

$$\overline{OA}^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad \text{yazılır.}$$

Not:  $\overline{AB}$  veya  $\overline{OA}$  uzunlukları seçilen birim cinsindedir.

**Örnek 1:** A (2 ; -3), B (8, 5) noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz;

$$\overline{AB}^2 = (2 - 8)^2 + (-3 - 5)^2 = 36 + 64 = 100$$

$$AB = 10$$

**Örnek 2:** A (-4 ; 2), B (8, -3) noktaları arasındaki uzaklığını bulunuz;

$$\overline{AB}^2 = (-4 - 8)^2 + (2 + 3)^2 = 144 + 25 = 169$$

$$AB = 13$$

**Sorular :**

1) Aşağıdaki noktalar arasındaki uzaklıkları bulunuz;

$$1^{\circ}) (3 ; 8), (9 ; 0), \quad 2^{\circ}) (-5, 6), (3, -9)$$

$$3^{\circ}) (0 ; 0), (-8, 15), \quad 4^{\circ}) (2 ; -3), (-6, 3)$$

$$5^{\circ}) (-5, -1), (-11, 9), \quad 6^{\circ}) (12, -6), (4, -2)$$

$$7^{\circ}) (-6, 2), (-1, 0), \quad 8^{\circ}) (0, -1), (1, -3)$$

2) Aşağıdaki noktaların başlangıç noktasına olan uzaklığını bulunuz.

$$1^{\circ}) (1, 1), \quad 2^{\circ}) (-3, 2), \quad 3^{\circ}) (-8, -15)$$

$$4^{\circ}) (4, -5), \quad 5^{\circ}) (-2, 7), \quad 6^{\circ}) (16, -2)$$

3) A (2, 1) noktasının, B (-5, 25), C (9, -23), D (26, 8) noktalarına eşit uzaklıktaki olduğunu gösteriniz.

4) Aşağıdaki üçgenlerin dik üçgen olduğunu gösteriniz;

$$1^{\circ}) A (0, -1), B (1, -3), C (9, 1)$$

$$2^{\circ}) A (13, -1), B (-9, 3), C (-3, -9)$$

$$3^{\circ}) A (-6, 2), B (5, -1), C (4, 4)$$

(Kenar uzunluklarını bulunuz ve Pitagor bağıntısını sağladıklarını görünüz.)

5) A (-3, -5), B (-1, -4), C (5, 7) noktaları veriliyor. ABC üçgeninin kenarlarının uzunluklarını bulunuz.

**4 — Bir (AB) doğru parçasının orta noktası :**

A ( $x_1, y_1$ ), B ( $x_2, y_2$ ) noktalarını alalım. AB nin M orta noktasıının koordinatları  $x_0, y_0$  olsun. (Şekil: 5)

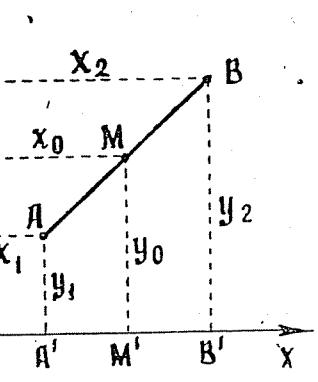
ABB'A' yamugunda M'M orta taban, alt üst tabanlar toplamının yarısına eşit olduğundan,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{olur.}$$

ABB'A' yamugundan da,

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Şuhalde M noktasının koordinatları



(Şekil 5)

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{olur.}$$

**Örnek :** A (5 ; 1), B (3 ; 5) noktalarının orta noktasının koordinatlarını bulunuz;

$$x_0 = \frac{5+3}{2} = 4, \quad y_0 = \frac{1+5}{2} = 3 \quad \text{bulunur.}$$

**Sorular :**

1) Aşağıdaki noktaların orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

$$1^{\circ}) A (3 ; 4), B (1 ; 2) \quad 2^{\circ}) A (4 ; 0), B (2 ; 2)$$

$$3^{\circ}) A (-5 ; -2), B (3 ; 9) \quad 4^{\circ}) A (-5, +2), B (3 ; 2)$$

$$5^{\circ}) A (-1 ; 3), B (-1 ; 3) \quad 6^{\circ}) A (-3 ; -1), B (-1 ; -3)$$

2) A (-2, -1), B (2, 1), C (-1, 4) noktaları ile verilen üçgenin kenarlarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

3) Köşeleri A (0 ; 1), B (2 ; 0), C (0 ; 0) olan üçgenin kenarlarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

4) AB doğru parçasının orta noktası (M) dir. A (4 ; 1) ve M (3 ; 2) olduğu bilindiğine göre (B) noktasının koordinatlarını bulunuz.

5) AB nin orta noktası (C) dir. A (10 ; 6), C (4 ; 1) olduğuna göre (B) noktasının koordinatlarını bulunuz ;

$$6) A (2, 4) noktasının ;$$

a) O (0 ; 0) noktasına göre,

b) M (5 ; 3) noktasına göre,

c) D (0 ; 4) noktasına göre, simetriği olan noktasının koordinatlarını bulunuz.

- 7) A (0 ; 0), B (5 ; 0), C (4 ; 2), D (1 ; 2) olan ABCD yamuğu veriliyor.  
 a) Bu yamuğun ikitokenar yamuk olduğunu gösteriniz;  
 b) AD ve BC nin M ; N orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.  
 c) MN doğru parçasının (orta taban), AB ile CD toplamının yarısına eşit olduğunu gösteriniz;  
 d) AC ye AD köşegenlerinin eşit olduğunu gösteriniz.
- Köşeleri A (3 ; 2), B (-3 ; -1), C (0 ; -3) olan bir üçgenin:  
 a) AB ve AC kenarlarının M ; N orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.  
 b) MN nin  $\frac{BC}{2}$  ye eşit olacağını gösteriniz  
 c) Üçgenin çevresini bulunuz.
- 9) A (2 ; 1), B (5 ; 2), C (6 ; 5), D (3 ; 4) ile verilen ABCD dörtgeninin eşkenar dörtgen olduğunu gösteriniz. AC ile BD nin orta noktasını bulunuz ve aynı noktası olduğunu görünüz.
- 10) A (2 ; 4), B (4 ; 2), C (12 ; 8), D (8 ; 12) ile verilen ABCD dörtgeninde;  
 a) Karşılıklı kenarların eşit olduğunu,  
 b) AC ve BD köşegenlerinin birbirine eşit olduğunu,  
 c) AC ile BD nin orta noktalarının aynı olduğunu gösteriniz.  
 d) Dörtgen nasıl bir dörtgen olur?
- 11) A (2 ; 0), B (4 ; 1), C (0 ; 5), D (-1 ; 3) noktaları veriliyor  
 a) AB = DC olduğunu gösteriniz.  
 b) AC = BD olduğunu gösteriniz.
- 12) A (0 ; 3), B (2 ; 0), C (4 ; 3), D (2 ; 6) noktaları veriliyor;  
 a) AB = BC = CD = DA olduğunu gösterin,  
 b) AC ve BC nin orta kenarlarını bulunuz. Aynı olduğunu görünüz.

### C — Grafikle gösterme

1 — Bir fonksiyonda değişgene verilen değerlerle fonksiyonun değişimini bir örnek üzerinde inceliyelim:

**Örnek 1:** Yaz aylarının herhangi bir gününde, (24) saatlik bir sıcaklık değişmesi aşağıdaki cedvelde gösterilmiştir:

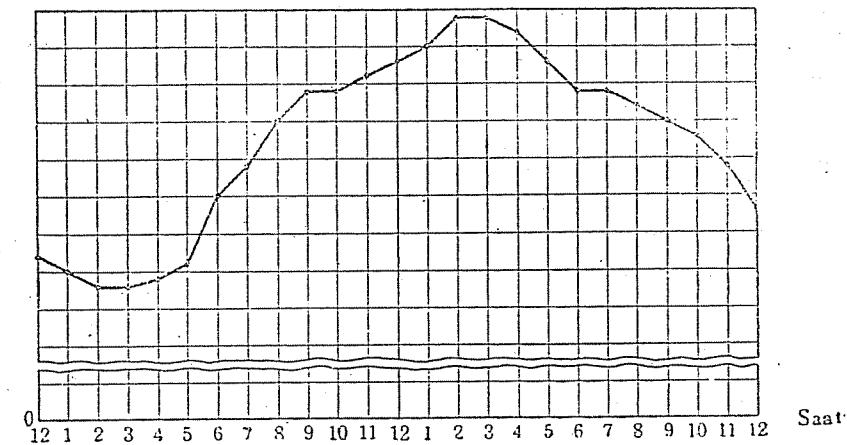
Saat	Öğleye kadar												Ögle
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
17,4	17	16,6	16,6	16,8	17,2	19	19,8	21	21,8	21,8	22,2	22,6	

Saat	Öğleden sonra												Ögle
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
23	23,3	23,8	23,4	22,6	21,8	21,8	21,4	21	20,6	19,8	18,6		

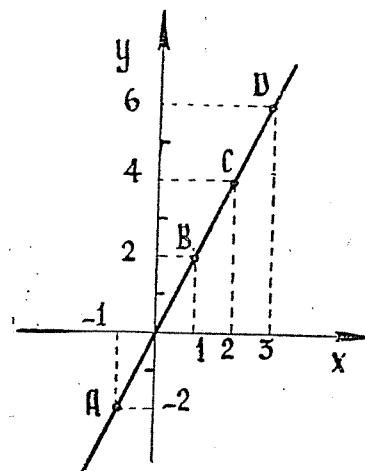
Bir birine dik koordinat eksenleri üzerinde ~~apsis eksenine saatları~~ ordinat eksenine de dereceleri yerlestirelim;

Yukarıda toplolarda meselâ öğleden önceki saat (8) de 21 veya öğleden sonraki (1) de 23 olarak bulunan sayı değerlerini koordinat eksenleri üzerinde birer nokta olarak yerlestirebiliriz. Bu şekilde bulunan bütün gözlemlere karşılık noktaları koordinat eksenlerine yerlestirelim. Bu noktaları yan yana birleştirirsek bir eğri meydana gelir. Bu eğri bir günde (24) saatine ait sıcaklık değişiminin grafiği olur.

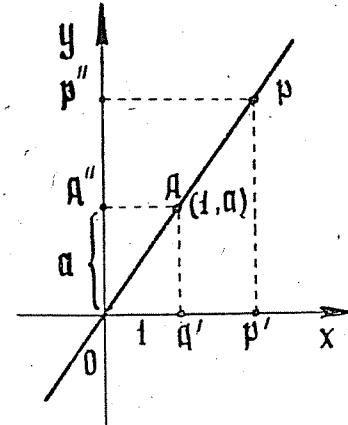
Derece



$x$  ve  $y$  nin aldığı bu değerleri koordinat eksenleri üzerinde yerlesiriz (Şekil 6)



(Şekil 6)



(Şekil 7)

Bu noktaların hepsi bir doğru üzerinde olur ve ( $O$ ) başlangıç noktasından geçer. Bu sonucu genel olarak gösterelim.

$y = ax$  fonksiyonun grafiği başlangıç noktasından geçen bir doğrudur.

$x = 0$  verilirse  $y = 0$  olacağinden grafiğin başlangıçtan geçtiği görürlür.  $x = 1$  verirsek  $y = a$  olacaktır. Bu noktası (Şekil 7) de ( $A$ ) ile gösterelim:

$A(1; a)$  dir.  $OA$  yi birleştirelim.  $OA$  doğrusu  $y = ax$  fonksiyonunun grafiği olur. Gerçekten, doğru üzerinde herhangi bir  $P(x, y)$  noktası alalım.

$OAA'$  ve  $OPP$  dik üçgünü benzer olduğu için,

$$\frac{OP'}{OA'} = \frac{OP}{OA} \quad \dots \dots (1)$$

yazılır. Aynı şekilde  $OAA''$  ve  $OPP''$  benzer üçgününlere,

$$\frac{OP''}{OA''} = \frac{OP}{OA} \quad \dots \dots (2)$$

yazılır. (1) ve (2) den  $\frac{OP'}{OA'} = \frac{OP''}{OA''}$  elde edilir.

Buradan,  $\frac{x}{1} = \frac{y}{a}$  veya  $\frac{y}{x} = a$  bulunur.

Bu neticeden de,  $y = ax$  bulunur.

Aynı şekilde  $y = ax$  fonksiyonuna uyan her ( $P$ ) noktasının da  $OA$  doğrusu üzerinde olduğunu gösterebiliriz.

3 —  $y = ax$  doğrusunun eğimi (açısal katsayısı):

( $O$ ) başlangıç noktasından geçen bu doğru yalnız ( $A$ ) gibi bir noktasının bulunması ile belli olur.  $A(x = 1, y = a)$  ile

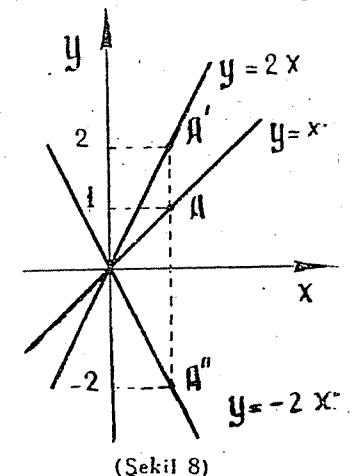
belli olsun. ( $a$ ) ya değişik değerler verirsek  $y = ax$  in göstereceği doğru değişir.  $a = 1, a = 2, a = -2$  değerleri için elde edilecek doğruları (Şekil 8) de görünsünüz.

1°)  $a > 0$  olursa fonksiyon çoğalan bir fonksiyon olur, ve göstereceği doğru da I ve III cü bölgededir.

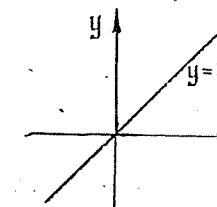
2°)  $a < 0$  ise fonksiyon azalan bir fonksiyondur, ve doğru II ve IV cü bölgede olur.

3°)  $y = ax$  ile  $y = -ax$  doğruları,  $x$  ve  $y$  koordinat eksenlerine göre simetrik olur (Şekil 8) de  $y = +2x$  ile  $y = -2x$  doğruları  $x$  ve  $y$  eksenlerine göre simetrik iki doğrudır.

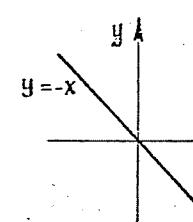
$y = ax$  gibi bir doğruda, doğrunun eksenlere göre durumunu belli eden ( $a$ ) ya doğrunun eğimi (açısal katsayı) denir.



(Şekil 8)



(Şekil 9)



(Şekil 10)

Özel hal:

1°)  $y = x$  doğrusu I ve III cü bölge ye ait açıortayı olur. (Şekil 9)

2°)  $y = -x$  doğrusu II ve IV cü bölgeye ait açıortayı olur. (Şekil 10)

Sorular:

1) Aşağıdaki doğruları çiziniz :

1°)  $y = 2x$       2°)  $y = -5x$       3°)  $y = 8x$

4°)  $y = -x$       5°)  $y = -3x$       6°)  $y = -6x$

7°)  $y = \frac{1}{2}x$       8°)  $y = \frac{3}{4}x$       9°)  $y = -\frac{2}{3}x$

2°) Başlangıç noktasından ve ;

1°) A (3 ; 5) noktasından geçen,

2°) B (4 ; 1) noktasından geçen,

3°) P (-1 ; 3) noktasından geçen,

4°) M (-4 ; -2) noktasından geçen, doğruların denklemelerini bulunuz

3) Aşağıdaki doğruların eğimlerini ve eksenlere göre simetrikleri olan doğrularını bulunuz;

$$y = 3x$$

$$y = -4x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = -\frac{3}{4}x$$

$$y = -x$$

$$y = -\frac{1}{6}x$$

4 —  $y = ax + b$  fonksiyonun incelenmesi:

$y = ax + b$  fonksiyonunun grafiği,  $y = ax$  fonksiyonunun başlangıçtan geçen doğrusuna ( $y$  eksenin üzerindeki ordinatı ( $b$ ) olan  $B(0; b)$  noktasından çizilen paralel bir doğrudur. (Şekil 11)  $y = ax$  doğrusunun ve  $B(0; b)$  noktasından ona paralel olan doğrunun çizilmiş olduğunu farzedelim. Paralel çizdiğimiz doğru üzerinde apsis  $x$  olan herhangi bir  $M$  noktasını alalım ( $OD = x$ ).  $OC = y$  ordinatının  $ax + b$  olacağını gösterirsek, doğru üzerindeki her ( $M$ ) noktasının koordinatları  $y = ax + b$  fonksiyonunu sağlamış olacağını görürüz.  $MD$  nin  $y = ax$  doğrusunu kestiği noktası ( $A$ ) olsun  $AD = ax$  olacaktır.

$$OC = MD = AD + MA$$

$AD = ax$ ,  $MA = OB = b$  (OBMA paralelkenar dır.) yerlerine koyarak,

$$OC = ax + b \quad \text{eder.}$$

buradan  $y = ax + b$  bağılılığı bulunur.

Karşıt olarak,  $y = ax + b$  bağılığuna uyan ( $M$ ) gibi her noktanın da  $y = ax$  doğrusuna paralel bir doğru üzerinde olduğunu gösterebiliriz.

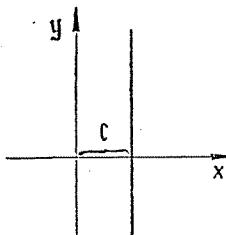
( $M$  den çizilecek paralelin  $y$  eksenini daima apsis ( $b$ ) olan noktasına keseceğini gösteriniz).

## Özel doğrular:

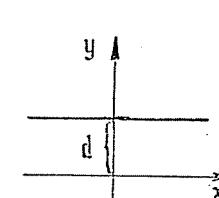
1°)  $x = 0$ ,  $x$  ekseninin denklemi olur.

2°)  $y = 0$ ,  $y$  ekseninin

3°)  $x = c$ ,  $Oy$  eksenine, apsis ( $c$ ) olan noktadan çizilen paralel bir doğrunun denklemi olur. (Şekil 12)

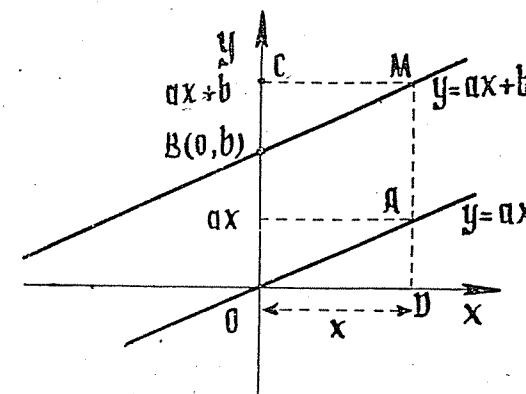


(Şekil 12)



(Şekil 13)

4°)  $y = d$ ,  $Ox$  eksenine ordinat ( $d$ ) olan noktadan çizilen paralel doğru denklemi olur. (Şekil 13)



(Şekil 11)

5 —  $y = ax + b$  in grafiğinin çizimi:

$y = ax + b$  şeklinde verilen fonksiyonların grafikleri bir doğru olduğuna göre, bu doğruya çizmek için, bu doğruya ait iki noktası bulup birleştirmek kâfîdir.

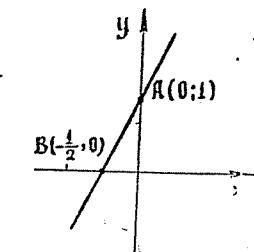
Bunun en kolayı da, doğrunun eksenleri kestiği noktaları bulmaktır.  $x = 0$  verirse  $y = b$  eder ki bu nokta  $y$  eksenini üzerindedir.  $A(0; b)$ .  $y = 0$  verirse  $ax + b = 0$ ,  $x = -\frac{b}{a}$  eder. Bu  $B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$  noktası da, doğrunun  $x$  eksenini kestiği noktası verir.  $A$  ve  $B$  yi birleştiren doğru istenilen grafik olur.

## Örnek 1:

$y = 2x + 1$  Grafiğini çiziniz;

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{A} \quad y=0, 2x+1=0, x=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases} \quad \text{B}$$

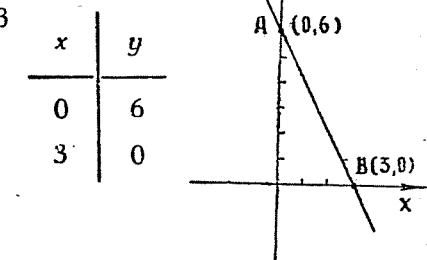



## Örnek 2:

$y = -2x + 6$  doğrunun grafiğini çiziniz;

$$\begin{cases} x=0 \\ y=6 \end{cases} \quad \text{A} \quad y=0, -2x+6=0, x=3$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{B}$$

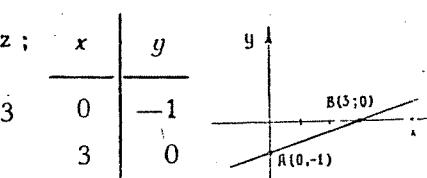


## Örnek 3:

$y = \frac{1}{3}x - 1$  doğrunun grafiğini çiziniz;

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \text{A} \quad y=0, \frac{1}{3}x - 1 = 0, x=3$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{B}$$



6 —  $Ax + By + C = 0$  bağılığını sağlayan noktalar yine bir doğru meydana getirirler.

( $A ; B ; C$  belli sayılardır.) Gerçekten, yukarıda denklemi;

$$By = -Ax - C \quad (B \neq 0 \text{ ise})$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

şeklinde yazmak mümkün olur. Burada

$$-\frac{A}{B} = a, \quad -\frac{C}{B} = b \quad \text{konursa, yukarıda denklem:}$$

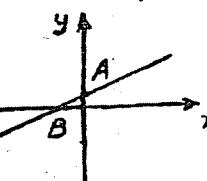
$y = ax + b$  şeklinde yazılabileceği görülmüştür. Bunun da bir doğru olduğunu göstermek istedim.

$Ax + By + C = 0$  şeklinde verilen doğru denkleminde doğrunun eğimi,

$$a = -\frac{A}{B} \quad \text{olar.}$$

Örnek 1:  $2x - 4y + 1 = 0$  Doğrusunu çiziniz;

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad -4y + 1 = 0 \quad y = \frac{1}{4} \\ y = 0 & \quad 2x + 1 = 0 \quad x = -\frac{1}{2} \\ & \quad x = -\frac{1}{2} \quad y = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{1}{4} \end{array} \right\} A \quad \left. \begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{array} \right\} B$$



Sorular:

1) Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz: ( $y = ax + b$ )

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) & y = x + 1 & 2^{\circ}) & y = -x + 1 & 3^{\circ}) & y = x + 5 \\ 4^{\circ}) & y = -3x - 2 & 5^{\circ}) & y = 2x - 7 & 6^{\circ}) & y = -x + 4 \\ 7^{\circ}) & y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{2} & 8^{\circ}) & y = -\frac{2}{3}x + 2 & 9^{\circ}) & y = \frac{4}{3}x + 2 \end{array}$$

2) Aşağıdaki grafikleri çiziniz: ( $Ax + By + C = 0$ )

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) & x - y - 3 = 0 & 2^{\circ}) & x - y + 1 = 0 \\ 3^{\circ}) & -3x + y = 0 & 4^{\circ}) & 4x - 7y - 2 = 0 \\ 5^{\circ}) & 2x - 3y - 1 = 0 & 6^{\circ}) & \frac{x}{3} - \frac{y}{4} - 1 = 0 \end{array}$$

3) Aşağıdaki doğruların önce eğimlerini bulunuz, sonra grafiklerini çiziniz.

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) & x + y = 7 & 2^{\circ}) & x - y = 0 & 3^{\circ}) & x - y = 5 \\ 4^{\circ}) & 5x - 2y = 9 & 5^{\circ}) & 4x + y - 3 = 0 & 6^{\circ}) & 7x - 5y = 14 \\ 7^{\circ}) & 4y = x & 8^{\circ}) & 6x - 4y = 7 & 9^{\circ}) & 9x + 8y = 17 \\ 10^{\circ}) & \frac{1}{2}x - y = 4 & 11^{\circ}) & \frac{3}{4}x - y = 2 & 12^{\circ}) & \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 0 \end{array}$$

4) Aşağıdaki doğruların grafiklerini çiziniz ve eğimlerini bulunuz.

$$\begin{array}{lll} 1^{\circ}) & \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 & 2^{\circ}) & \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{4} & 3^{\circ}) & \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5} \\ 4^{\circ}) & \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{4} & 5^{\circ}) & \frac{5x}{8} - \frac{y}{4} = \frac{1}{2} & 6^{\circ}) & \frac{x-y+1}{4} = \frac{1}{2} \end{array}$$

7 — İki doğrunun paralel olması şartı:

$y = ax + b$  doğrusu,  $y = a'x + b'$  doğrusuna  $A(0, b)$  noktasından çizilen paralel bir doğru denklemi olduğunu önce gördük.

Bu doğruların eğimleri birbirine eşittir. Şuan da iki doğrunun paralel olması için, eğimlerinin eşit olması lâzımdır.

$y = ax + b$  ve  $y = a'x + b'$  doğruları paralel ise,

$$a = a'$$

olmalıdır.

Örnek :

$$y = 3x + 1$$

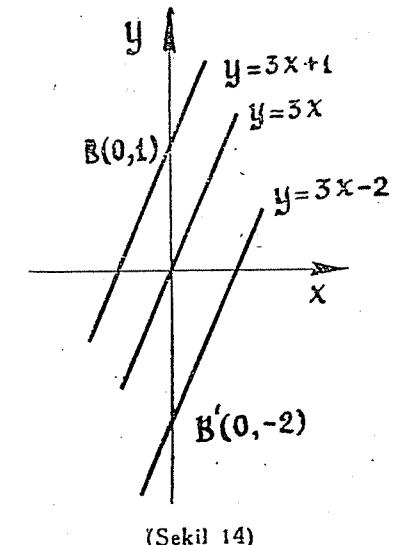
ve

$$y = 3x - 2$$

doğruları birbirine paraleldir.

Cünkü : Birinci doğru  $B(0 ; 1)$  noktasında

ikinci doğru  $B'(0 ; -2)$  noktasında başlangıçtan geçen  $y = 3x$  doğrusuna paralel olurlar. (Şekil 14)



(Şekil 14)

Sorular:

1) Aşağıdaki doğruların paralel olduklarını gösteriniz.

$$\begin{array}{ll} 1^{\circ}) & y = 2x + 1 & y - 2x - 3 = 0 \\ 2^{\circ}) & y = -3x + 2 & 6x + 2y - 1 = 0 \\ 3^{\circ}) & \frac{2x-1}{4} = \frac{y}{2} & \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ 4^{\circ}) & \frac{x}{3} - y = \frac{1}{5} & \frac{y-1}{2} - \frac{x}{6} = 1 \end{array}$$

2)  $y = 3x + 5$  doğrusunun  $y = mx + 4$  doğrusuna paralel olması için  $m$  ne olmalıdır?

3<sup>o</sup>)  $y = mx + 1$  doğrusu ile  $y = (2m-4)x + 3$  doğrusunun paralel olmaları için  $m$  ne olmalıdır?

4<sup>o</sup>)  $Ax + By + C = 0$  ve  $A'x + B'y + C' = 0$  doğrularının paralel olması şartı bulunuz. ( $AB' = BA'$ )

8 — İki doğrunun dik olması şartı:

$y = ax + b$  ve  $y = a'x + b'$  doğrularının dik olması için, bunlara başlangıçta paralel olan,

$y = ax$  ve  $y = a'x$  doğrularının dik olması lâzımdır.

$y = ax$  ve  $y = a'x$  gibi iki doğrunun dik olması halini inceleyelim:

$OA = 1$  olmak üzere,  $a$  noktasından  $y$  eksenine bir paralel çizelim.

Doğruları kestiği noktalar  $B$ ,  $C$  olsun. (Şekil 15)

$B$  nin koordinatları  $x=1$ ,  $y=a$  dir.  $C$   $\rightarrow$   $x=1$ ,  $y=a'$  dir.

$OBC$  üçgeninin dik üçgen olabilmesi için;

$$\overline{OA}^2 = -\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$
 olmalıdır.

(Öklit yükseklik teoremi)

$AB = a$ ,  $AC = a'$ ,  $OA = 1$  konursa,

$$1 = -a \cdot a' \text{ veya } a \cdot a' = -1 \text{ bağlılığı elde edili}$$

Şuhalde; İki doğrunun dik olması için eğimleri çarpımının  $(-1)$  eşit olması lâzımdır.

Örnek :  $y = 2x + 1$  doğrusu ile  $y = -\frac{1}{2}x + 3$

doğruları birbirine dikdir.

Çünkü : Birinciden  $a = 2$

İkinciden  $a' = -\frac{1}{2}$  dir.

$$a \cdot a' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ olur.}$$

Bu da bize, iki doğrunun dik olduğunu gösterir.

### Sorular :

1) Aşağıdaki doğruların birbirine dik olduğunu gösteriniz.

1°)  $y = -3x + 1$ ,  $y = \frac{1}{3}x + 2$

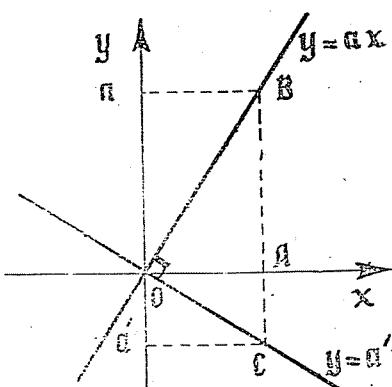
2°)  $y = -\frac{1}{5}x - 3$ ,  $y = 5x + 2$

3°)  $\frac{x-1}{3} = \frac{2y+1}{4}$ ,  $1 - \frac{3}{2}x - y = 0$

4°)  $\frac{1-x}{4} - \frac{y+3}{2} = 1$ ,  $\frac{4x-3}{2} = y$

2)  $2x - 3y - 1 = 0$ ,  $3x + 2y - 2 = 0$ ,  $8x - 12y + 15 = 0$ ,  $6x + 2y - 25 = 0$  doğrularının bir dik dörtgen yaptıklarını gösteriniz

3)  $y = -2x + 1$  doğrusu ile  $y = mx + 3$  doğrusunun dik olması için  $m$  ne olmalıdır?



(Şekil 15)

4)  $y = (4-m)x + 1$  doğrusu ile  $y = -\frac{1}{3}x$  doğrusunun dik olması için  $m$  ne olmalıdır?

5)  $Ax + By + C = 0$  ve  $A'x + B'y + C' = 0$  doğrularının dik olması şartını bulunuz. ( $AA' + BB' = 0$ )

8 — Belli bir noktadan geçen ve eğimi bilinen doğru denklemi:

$$y = ax + b \quad \dots \quad (1)$$

gibi, herhangi bir doğru denklemi alalım. Bu doğrunun  $A$  gibi bir noktasından geçebilmesi için,  $A$  noktasının koordinatları bu doğruya sağlamalıdır. Meselâ :  $A(x_1, y_1)$  ise

$$y_1 = ax_1 + b \quad \dots \quad (2) \text{ olmalıdır.}$$

(1) ve (2) denklemelerini taraf tarafa çıkarırsak :

$$y - y_1 = ax + b - (ax_1 + b)$$

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

denklemi bulunur. Bu denklem,  $A(x_1, y_1)$  noktasından geçen ve eğimi  $a$  olan bir doğrunun denklemini verir.

Örnek :  $A(3, 2)$  noktasından geçen ve eğimi  $a = 4$  olan doğru denklemini bulunuz.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

denkleminde,  $y_1 = 2$ ,  $x_1 = 3$ ,  $a = 4$  koyarsak,

$$y - 2 = 4(x - 3)$$

$$y = 4x - 10 \text{ bulunur.}$$

### Sorular :

Aşağıda bir noktası ve eğimi verilen doğruların denklemelerini bulunuz :

1°)  $A(3 ; 1)$ ,  $a = 2$

2°)  $A(4 ; -2)$ ,  $a = -3$

3°)  $B(1 ; -1)$ ,  $a = 4$

4°)  $C(-2 ; -6)$ ,  $a = -1$

5°)  $A\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{5}\right)$ ,  $a = -\frac{2}{3}$

6°)  $P\left(-\frac{1}{2} ; 3\right)$ ,  $a = \frac{-1}{4}$

9 — Bir noktadan geçen ve belli bir doğruya paralel olan doğru denklemi:

$A(x_1, y_1)$  noktasından geçen ve  $y=mx+n$  gibi bir doğruya paralel olan doğrunun denklemini bulmak için, önce  $A(x_1, y_1)$  noktasından geçen doğru denklemi yazılır.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

sonra, iki doğrunun paralel olması için eğimleri eşit olacağından

$$a = m$$

konur ve paralel doğru denklemi bulunur.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Örnek :  $A(1 ; 4)$  noktasından geçen ve  $y = -2x + 1$  doğrusuna paralel olan doğru denklemini yazınız,

Verilen doğrunun eğimi  $m = -2$  dir.

Belli bir noktadan geçen ve eğimi belli olan doğru denkleminden;

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = -2(x - 1)$$

$$y = -2x + 6 \quad \text{bulunur.}$$

Sorular :

1)  $A(3 ; 1)$  noktasından geçen ve  $y = -2x + 1$  doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

2)  $P(-1 ; -3)$  noktasından geçen ve  $2x - 3y = 1$  doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

3)  $A\left(-1 ; \frac{1}{2}\right)$  noktasından geçen  $\frac{2x-y}{3} = \frac{1}{2}$  doğrusuna paralel olan doğru denklemini yazınız.

4) Aşağıdaki noktalardan geçen ve karşısındaki doğrulara paralel olan doğruların denklemelerini bulunuz.

$$1^{\circ}) \quad A(5 ; 1) \quad . \quad y = -3x + 1$$

$$2^{\circ}) \quad A(4 ; -1) \quad . \quad y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$3^{\circ}) \quad A(-5 ; 3) \quad . \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$4^{\circ}) \quad A\left(-\frac{1}{3} ; -3\right) \quad . \quad y = -4x + \frac{1}{5}$$

$$5^{\circ}) \quad P\left(\frac{1}{3} ; -3\right) \quad . \quad y = -\frac{4}{5}x + 1$$

$$6^{\circ}) \quad M\left(-2 ; -\frac{1}{3}\right) \quad . \quad 3x - 2y + 1 = 0$$

10 — Bir noktadan geçen ve belli bir doğruya dik olan doğru denklemi :

$A(x_1, y_1)$  noktasından geçen ve  $y = mx + n$  gibi bir doğruya dik olan doğrunun denklemini bulmak için, önce  $A(x_1, y_1)$  noktasından geçen doğru denklemi yazılır.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

sonra, iki doğrunun dik olması şartından. ( $m \cdot a = -1$  den)

$$a = -\frac{1}{m}$$

$a$  bulunur. Yerine konursa,

$$\boxed{y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)}$$

dik doğru denklemi elde edilir.

Şuhalde, Bir noktadan geçen ve verilen bir doğruya dik olan doğrunun denklemini bulmak için : önce o noktadan geçen doğru denklemi yazılır. Sonra eğim yerine dik olan doğrunun eğiminin tersinin ters işaretli olan eğim konur.

Örnek : 1-  $A(3 ; 1)$  noktasından geçen ve  $y = 2x - 1$  doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

$A(3 ; 1)$  noktasından geçen doğru denklemi :

$$y - 1 = a(x - 3) \quad \text{dir.}$$

$a$  eğimi yerine, dik olan doğrunun eğimi olan 2 nin tersinin ters işaretli olan  $-\frac{1}{2}$  konur.

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\text{dik doğru denklemi } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\text{veya, } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \quad \text{bulunur.}$$

Örnek : 2-  $A(3 ; -2)$  noktasından geçen ve  $2x + 3y + 5 = 0$  doğrusuna dik olan doğrunun denklemini yazınız ;

$A(3 ; -2)$  den geçen doğru denklemi ;

$$y + 2 = a(x - 3) \quad \text{dir.}$$

verilen doğrunun eğimi olan  $-\frac{2}{3}$  ile bu doğrunun  $a$  eğimi çarpımı  $-1$  olacağından,

$$a \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

yerine koyarak,

$$y + 2 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

veya,

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} \text{ dik doğru denklemi bulunur.}$$

Sorular :

1) A (4 : 5) noktasından geçen ve  $3x + 5y = 1$  doğrusuna dik olan doğrunun denklemini yazınız. ( $-5x + 3y + 5 = 0$ )

2)  $y = 3x + 1$  doğrusuna A (1 ; 3) noktasından çizilen dik doğrunun denklemini bulunuz.

3) P (-2 ; 3) noktasından geçen ve  $3x + 2y - 5 = 0$  doğrusuna dik olan doğrunun denklemini yazınız. ( $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ )

4)  $2x - 3y + 5 = 0$  ve  $3x + 2y - 8 = 0$  doğrularının birbirine dik olduğunu gösteriniz.

Sonra A (4 ; 1) noktasından her ikisine birden çizilen dik doğruların denklemelerini bulunuz. Bu bulacağınız doğruların da birbirine dik olacaklarını gösteriniz.

5) Aşağıda verilen noktalardan karşıslarında bulunan doğrulara çizilen dik doğruların denklemelerini yazınız.

$$1^{\circ}) \quad A(1 ; 4), \quad y = 3x - 1$$

$$2^{\circ}) \quad A(-1 ; -3), \quad y = -2x + 3$$

$$3^{\circ}) \quad A(-5 ; 0), \quad y = -x + 6$$

$$4^{\circ}) \quad A(5 ; -4), \quad 2x - 3y + 1 = 0$$

$$5^{\circ}) \quad B(1 ; -2), \quad 2x + 5 - 6 = 0$$

$$6^{\circ}) \quad P(4 ; -1), \quad -x + 4y - 1 = 0$$

11 — İki noktadan geçen doğrunun eğimi :

$y = ax + b \dots \dots (1)$  doğrusu  $(x_1 ; y_1)$  ve  $B(x_2 ; y_2)$  noktalardan geçiyorsa,

$$y_1 = ax_1 + b \dots \dots (2)$$

$$y_2 = ax_2 + b \dots \dots (3)$$

olmalıdır. (2) ve (3) ü taraf tarafı çarparırsak,

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$$

bulunur. Buradan  $a$  yi bulursak ;

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ olur.}$$

İki noktadan geçen doğrunun eğimi, o noktaların ordinatları farkının apsisleri farkına oranına eşit olur.

Örnek : A(2 ; 5), B(1 ; 3) noktalardan geçen doğrunun eğimi.

$$a = \frac{5-3}{2-1} = \frac{2}{1} = 2 \text{ dir.}$$

12 — İki noktadan geçen doğrunun denklemi :

A( $x_1$   $y_1$ ) ve B( $x_2$  ,  $y_2$ ) noktaları,

$$y = ax + b \dots \dots (1)$$

doğrusu üzerinde iseler, A ve B nin koordinatları bu doğruya sağlarlar ve,

$$y_1 = ax_1 + b \dots \dots (2)$$

$$y_2 = ax_2 + b \dots \dots (3)$$

Bağlılıklar mevcut olur. (1) ile (2) yi çıkarırsak ;

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

$$a = \frac{y - y_1}{x - x_1} \dots \dots (4)$$

bulunur. (2) ile (3) ü çıkararak :

$$y_1 - y_2 = a(x_1 - x_2)$$

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \dots \dots (5)$$

bulunur. (4) ile (5)i eşit yazarak ;

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ veya}$$

denklemi bulunur

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}}$$

Örnek : A(3 ; 2) , B(-2 ; -3) noktalardan geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Verilen noktalardan,

$$x_1 = 3, y_1 = 2; x_2 = -2, y_2 = -3 \text{ dır.}$$

İki noktadan geçen doğru denklemlerinde yerine konursa :

$$\frac{y - 2}{2 - (-3)} = \frac{x - 3}{3 - (-2)}$$

veya,

$$\frac{y - 2}{5} = \frac{x - 3}{5}$$

Buradan,  $y = x - 1$  doğrusu bulunur.

Sorular :

1) A (1 ; 2), B (4 ; 0) noktalardan geçen doğrunun denklemini bulunuz.

2) A (-1 ; -3), B ( $\frac{1}{2} ; 4$ ) noktalardan geçen doğru denklemini yazınız.

3) Aşağıdaki iki noktadan geçen doğru denklemelerini yazınız.

1°) A(0 ; 0) 2°) A(2 ; 1) 3°) A(-2 ; -1)  
B(1 ; 2) B(-2 ; 0) B(-3 ; 4)

4°) A(2 ; 4) 5°) A(4 ; -2) 6°) A( $\frac{1}{2} ; 3$ )  
B(-3 ; 5) B(-1 ; 0) B(-2 ;  $\frac{3}{2}$ )

4) A (-1 ; 4), B (2 ; 5) noktalarından geçen doğruya, P (-1 ; -3) noktasından çizilen paralel doğru denklemini bulunuz.

5) Köşeleri A (1 ; -2), B (3 ; 5), C (-1 ; 1) olan bir üçgenin kenarlarının denklemelerini bulunuz.

6) Köşeleri A (0 ; -3), B (3 ; 2), C (-3, -1) olan üçgenin kenar denklemlerini bulunuz.

### 13 — İki doğrunun kesim noktası:

$y = ax + b$  ve  $y = a'x + b'$  gibi iki doğrunun ortak noktası  $M(x, y)$  ise bu nokta her iki doğru denklemini de sağlamalıdır.

Şu halde, iki doğrunun denklemi aynı zamanda sağlanan  $x, y$  değerleri, yani verilen doğru denklemlerinin ortak çözümünden bulunacak değerler, kesim noktasının koordinatlarını verir.

Örnek 1:  $y = \frac{1}{2}x - 4$  ve  $2x + 5y - 11 = 0$  doğrularının kesim noktalarını bulunuz.

$$y = \frac{1}{2}x - 4 \quad \dots \dots (1)$$

$$2x + 5y + 11 = 0 \quad \dots \dots (2)$$

(1) ve (2) denkleminin ortak çözümü,

$$2x + 5\left(\frac{1}{2}x - 4\right) + 11 = 0$$

$$2x + \frac{5}{2}x - 20 + 11 = 0$$

$$x = 2$$

(1) de  $x = 2$  koyarsak,

$$y = -3 \text{ bulunur.}$$

İki doğrunun ortak noktası  $M(2 ; -3)$  olur.

### Sorular :

1) Aşağıdaki doğruların kesim noktalarını bulunuz.

- |                  |                         |                     |
|------------------|-------------------------|---------------------|
| 1º) $y = 2x - 1$ | 2º) $y = -3 + 5$        | 3º) $y = 2x$        |
| $y = x + 3$      | $y = -\frac{1}{2}x - 1$ | $y = -x + 6$        |
| 4º) $x - 4y = 3$ | 5º) $x + 4y = 1$        | 6º) $x = y + 2$     |
| $3x - 8y = 1$    | $2x - y + 1 = 0$        | $3y = -5x - 2$      |
| 7º) $5x - y = 7$ | 8º) $x - 4y = 3$        | 9º) $2x + 5y = -11$ |
| $2x + 5y = 19$   | $3x - 8y = 1$           | $x - 2y = 8$        |

2) Kenar denklemleri

$$x - 2y + 7 = 0, x - 4y + 11 = 0, x - y + 2 = 0$$

olan üçgen köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

$$A(-3 ; 2), B(1 ; 3), C(3 ; 5)$$

3) Kenarlarının denklemleri,

$$3x - y + 1 = 0, x - 2y + 3 = 0, x + 3y - 1 = 0$$

olan üçgenin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

### 14 — İki bilinmeyenli birinci dereceden denklem sisteminin grafikle çözümü:

Verilen denklemlere ait grafikler birer doğru olur. Bu iki doğrunun aynı koordinat sisteminde grafikleri çizilir. Doğruların kesim noktasına ait apsis ve ordinat değerleri de iki denklemin çözümünü verir.

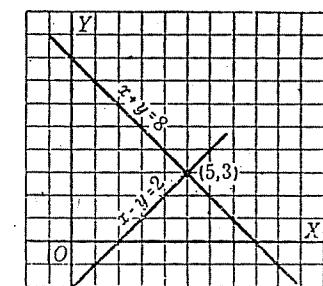
Not: Grafikler milimetrik kağıt üzerinde ve çok dikkatli çizilirse daha doğru sonuç bulunur.

Örnek 1:  $\begin{cases} x + y = 8 \dots \dots (1) \\ x - y = 2 \dots \dots (2) \end{cases}$

sisteminin grafik yol ile çözümü:

$$\begin{cases} \text{(1) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 8 \end{cases} \\ \text{(2) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} \quad x = 8 \quad x = 2$$

$$\begin{cases} \text{(1) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 8 \end{cases} \\ \text{(2) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} \quad \text{bulunur.} \quad x = 8 \quad x = 2$$



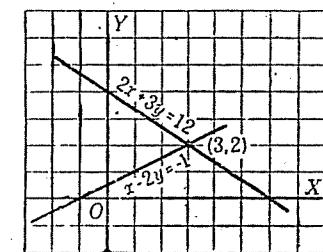
Şekilde grafikler ve kesim noktasının  $x = 5$ ,  $y = 3$  olan koordinatları görülmektedir. Bu bulunan 5 ve 3 değerleri sistemde çözümü olur.

Örnek 2:  $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \dots \dots (1) \\ x - 2y = -1 \dots \dots (2) \end{cases}$

sisteminin grafik yol ile çözümü:

$$\begin{cases} \text{(1) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases} \\ \text{(2) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad x = 6 \quad x = -1$$

$$\begin{cases} \text{(1) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases} \\ \text{(2) denkleminden, } x = 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \quad \text{bulunur.} \quad x = 6 \quad x = -1$$



Şekilde, doğruların grafikleri ve kesim miktarlarının  $x = 3$ ,  $y = 2$  koordinatları görülmektedir. Buradan sisteminin köklerinin 3 ile 2 olduğu anlaşılr.

### Sorular :

Aşağıdaki sistemleri grafik yol ile çözünüz.

$$\begin{cases} 1º) \quad x + y = 8 \\ \quad x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2º) \quad x + y = -5 \\ \quad x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3º) \quad x - 5 = 5 \\ \quad 2x + 3y = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 4º) \quad 4x + y = 10 \\ \quad x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5º) \quad x + 2y = 0 \\ \quad 2x - y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 6º) \quad x - y = 2 \\ \quad x + 2y = 14 \end{cases}$$

Bölümle ilgili sorular

Aşağıdaki dörtgen çeşitlerinin doğruluğunu sağlayınız.

a - Dik dörtgen

- |             |          |           |             |
|-------------|----------|-----------|-------------|
| A( 2 ; 4)   | B(4 ; 2) | C(12 ; 8) | D( 8 ; 12)  |
| A( 0 ; 2)   | B(2 ; 0) | C( 6 ; 4) | D( 4 ; 6 )  |
| A(-3 ; -13) | B(5 ; 4) | C( 0 ; 6) | D(-7 ; -11) |

b - Eşkenar üçgen

- |            |          |                                  |
|------------|----------|----------------------------------|
| A(-1 ; 1)  | B(1 ; 3) | C( $\sqrt{3}$ ; $3\sqrt{3}$ )    |
| A(-1 ; -2) | B(4 ; 2) | C(1- $2\sqrt{3}$ ; $3\sqrt{3}$ ) |

c - İkizkenar yamuk

- |           |            |                                      |                         |
|-----------|------------|--------------------------------------|-------------------------|
| A( 4 ; 3) | B(-1 ; -2) | C( 6 ; 2)                            | D( 5 ; -5)              |
| A( 2 ; 0) | B( -4 ; 1) | C( 0 ; 5)                            | D(-1 ; 3)               |
| A(-2 ; 2) | B(-1 ; 1)  | C(-3 ; 2)                            | D(-5 ; 0)               |
| A(-2 ; 1) | B( 11 ; 7) | C( $\frac{10}{2}$ ; $\frac{21}{2}$ ) | D(-1 ; $\frac{13}{2}$ ) |

d - Paralekenar

- |            |           |           |            |
|------------|-----------|-----------|------------|
| A( 1 ; 1)  | B(6 ; 2)  | C(5 ; 4)  | D( 0 ; 3)  |
| A( 1 ; 3)  | B(2 ; 1)  | C(5 ; 4)  | D( 4 ; 6 ) |
| A( 1 ; 1)  | B(4 ; 2)  | C(10 ; 4) | D( 4 ; 2)  |
| A(-3 ; -2) | B(8 ; 10) | C(8 ; 14) | D(-3 ; 2)  |
| A(-4 ; -2) | B(2 ; 0)  | C(8 ; 6)  | D( 2 ; 4)  |

e - Eşkenar dörtgen

- |            |            |            |          |
|------------|------------|------------|----------|
| A( 4 ; 2)  | B( 4 ; 7)  | C( 8 ; 10) | D(8 ; 5) |
| A( 2 ; 1)  | B( 5 ; 2)  | C( 6 ; 5)  | D(3 ; 4) |
| A( 4 ; 2)  | B(10 ; 4)  | C(12 ; 10) | D(6 ; 8) |
| A( 0 ; 3)  | B( 2 ; 0)  | C( 4 ; 3)  | D(2 ; 6) |
| A(-1 ; -5) | B( 5 ; -3) | C( 7 ; 3)  | D(1 ; 1) |

f - Yamuk

- |          |            |            |          |
|----------|------------|------------|----------|
| A(3 ; 4) | B(2 ; 1)   | C(12 ; 4)  | D(9 ; 6) |
| A(1 ; 1) | B(5 ; -11) | C( 5 ; -3) | D(3 ; 3) |

Kare

- |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| A(7 ; 1)  | B(13 ; 7) | C(7 ; 13) | D( 1 ; 7) |
| A(0 ; -1) | B( 2 ; 1) | C(0 ; 3)  | D(-2 ; 1) |

g - İkizkenar üçgen

- |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| A( 1 ; 2) | B( 8 ; 3) | C( 4 ; 6) |
| A( 1 ; 7) | B( 2 ; 0) | C( 6 ; 2) |
| A(-2 ; 4) | B( 2 ; 1) | C( 3 ; 4) |
| A( 1 ; 2) | B( 4 ; 3) | C( 2 ; 5) |
| A(-3 ; 2) | B(-1 ; 4) | C(-5 ; 0) |

i - Dik üçgen

- |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| A(2 ; 3)  | B(4 ; 7)  | C( 4 ; 2) |
| A(2 ; 8)  | B( 9 ; 3) | C( 8 ; 9) |
| A(1 ; 2)  | B(3 ; 4)  | C(-1 ; 4) |
| A(4 ; -2) | B(4 ; 3)  | C(-6 ; 4) |
| A(1 ; 5)  | B(3 ; 1)  | C( 7 ; 9) |

ikizkenar.